Programme de khôlle MPSI n°8 - du 18/11/24 au 22/11/24

1. Primitives et intégrales
   - Définition de primitive
   - Toute fonction continue sur $[a,b]$ admet des primitives (toutes égales à une constante près)
   - Calcul de primitives et intégrales simples
   - Fonctions définies par une intégrale (montrer qu'elle sont définies, continues, dérivables, ... puis calculer leur dérivée).
   - Interprétation géométrique de l'intégrale et approximation avec les aires des rectangles
   - Relation de Chasles (application au calcul d'intégrale de valeurs absolues...)
   - Propriétés de l'intégrale (positivité, croissance, si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle alors la fonction est nulle, majoration de la valeur absolue d'une intégrale,...)
   - inégalité de la moyenne
   - Intégration par parties
   - Changement de variable
   - Intégrales de fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$
   - Intégrales de fonctions à valeurs complexes

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Primitives et intégrales**

  Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$ $(a \leq b)$.

  1. Si f est positive sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
  2. Si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
  3. Si f est positive et continue sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$
  4. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$
  5. Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$ et impaire. Alors on a : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
  6. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.

     Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$