Programme de khôlle MPSI n°23 - du 01/04/25 au 05/04/25

1. **Applications linéaires**
   - Tout (nécessaire pour pouvoir traiter les exercices des chapitres suivants).
2. **Matrices d'applications linéaires**
   - Matrice d'une application linéaire dans des bases données.
   - Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ calcul de $u(x)$ à l'aide de la matrice de u.
   - Lien entre opérations matricielles et opérations entre applications linéaires
   - Noyau/image/rang d'une matrice
   - Matrices et systèmes linéaires
   - Matrice de passage d'une base à une autre
   - Formules pour le changement de base
   - Matrices équivalentes
   - Deux matrices (de même taille) sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang
   - Matrices semblables
   - Trace d'une matrice, propriétés
   - Si deux matrices sont semblables, alors elles ont la même trace
3. **Déterminants**
   - Permutations : définition de S_n, structure de groupe (non commutatif si $n \geq 3$).
   - Transpositions, p-cycles
   - Toute permutation peut s'écrire comme composition de cycles à supports disjoints (sans démonstration)
   - Toute permutation peut s'écrire comme composition de transpositions
   - Signature d'une permutation
   - Formes n-linéaires alternées (généralités et exemples)
   - Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base e de l'ev E.
   - Déterminant d'un endomorphisme
   - Déterminant d'une matrice carrée (formules pour les matrices 2×2 et 3×3, opérations sur les lignes/colonnes, formules de développement de Laplace)

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Matrices d'applications linéaires**

  1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
  2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
     Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{r}g(p)$

- **Permutations**

  1. Deux cycles à supports disjoints commutent.
  2. Si F est une forme linéaire alternée sur E, alors F est antisymétrique.