Programme de khôlle MPSI n°21 - du 24/03/25 au 28/03/25

1. Espaces vectoriels
   - Tout (Le programme de cette semaine porte principalement sur les applications linéaires, mais dans les exercices on pourra poser aussi des questions sur les espaces vectoriels).
2. Applications linéaires
   - Définition : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
   - Si f linéaire (de E dans F) alors $f(0_E) = 0_F$.
   - Opérations sur les applications linéaires : $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un espace vectoriel
   - Bilinéarité de la composition d'applications linéaires
   - Structure de groupe de $\big(GL(E),\circ\big)$
   - Noyau d'une application linéaire, lien avec l'injectivité
   - Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. E_1 sev de E, F_1 sev de F. $f(E_1)$ est un sev de F, $f^{-1}(F_1)$ est un sev de E
   - Image d'une application linéaire (si $(e_1,\ldots,e_n)$ base de E alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1)\ldots f(e_n)\big)$
   - Soient E, F deux espaces vectoriels. Il existe une et une unique application linéaire $f : E \to F$ définie par ses images sur une base de E.
   - $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$ (sans démonstration)
   - Si E, F ev de dim finie, $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f bijective si, et seulement si, l'image d'une base de E est une base de F.
   - Espaces isomorphes, lien avec la dimension.
   - Si f est un endomorphisme d'un ev E de dimension finie : bijective $\Leftrightarrow$ injective $\Leftrightarrow$ surjective
   - Théorème du rang
   - Si $E = F \oplus G$ et $v \in \mathscr{L}(F,E')$, $w \in \mathscr{L}(G,E')$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,E')$ dont les restrictions aux sous-espaces F et G coïncident avec v et w respectivement (sans démonstration).
   - $\big(\mathscr{L}(E),+,\circ\big)$ est un anneau (non commutatif si $\dim(E) \geq 2$).
   - Soit $E = F \oplus G$. Projecteur sur F parallélément à G (caractérisation avec $p \circ p = p$).
   - Soit $E = F \oplus G$. Symétrie par rapport à F parallélément à G (caractérisation avec $s \circ s = \mathrm{Id}$).
   - Formes linéaires.
   - Hyperplans (caractérisation en dimension finie et infinie).
   - Sous-espaces affines.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Applications linéaires** Soient E et F deux espaces vectoriels.

  1. Soit $(e_1, \dots e_n)$ une famille génératrice de E_1. Montrer que $f(E_1) = \text{Vect}\big(f(e_1) \dots f(e_n)\big)$.
  2. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ (E, F ev de dim finie).
     Montrer que : f bijective $\Longrightarrow$ l'image d'une base de E par f est une base de F.
  3. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ (E, F ev de dim finie).
     Montrer que : l'image d'une base de E par f est une base de $F \Longrightarrow f$ bijective.
  4. Soit $E = F \oplus G$ et soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors
     (i) $p \circ p = p$
     (ii) $\text{Ker}(p) = G$ et $\text{Im} p = F$.
  5. Soit $E = F \oplus G$. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors $s \circ s = \text{Id}_E$.