**Programme de khôlle MPSI n°20** - du 17/03/25 au 21/03/25

1. Espaces vectoriels

   - Définition d'espace vectoriel
   - Exemples classiques d'espaces vectoriels
   - Définition et caractérisation de sous-espace vectoriel
   - Combinaisons linéaires
   - Sous-espace vectoriel engendré par une partie $A$ ($\neq \emptyset$) de $E$ notation $\text{Vect}(A)$, caractérisation de $\text{Vect}(A)$ (comme ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $A$)
   - Familles génératrices, libres, bases
   - Bases canoniques
   - Somme de deux sous-espaces vectoriels $E_1 + E_2$ : définition et caractérisation (ensemble des sommes d'un élément de $E_1$ et un élément de $E_2$)
   - Somme directe de deux sous-espaces vectoriels
   - Sous-espaces supplémentaires
   - Espaces vectoriels de dimension finie
   - Relation entre cardinal d'une famille génératrice et cardinal d'une famille libre (en dim finie)
   - Cardinal d'une familles libre / génératrice / base en dimension finie
   - Théorème de la base extraite
   - Théorème de la base incomplète
   - Dimension d'un sous-espace vectoriel
   - Existence du supplémentaire (en dim finie)
   - $E_1$ et $E_2$ supplémentaires dans $E \iff$ la juxtaposition d'une base de $E_1$ et une base de $E_2$ donne une base de $E$
   - Formule de Grassmann
   - Rang d'une famille de vecteurs (calcul du rang avec les matrices)

2. Applications linéaires

   - Définition : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
   - Si $f$ linéaire (de $E$ dans $F$) alors $f(0_E) = 0_F$.
   - Opérations sur les applications linéaires : $(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel
   - Bilinéarité de la composition d'applications linéaires
   - Structure de groupe de $\big(GL(E), \circ\big)$
   - Noyau d'une application linéaire, lien avec l'injectivité
   - Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. $E_1$ sev de $E$, $F_1$ sev de $F$. $f(E_1)$ est un sev de $F$, $f^{-1}(F_1)$ est un sev de $E$
   - Image d'une application linéaire (si $(e_1, \ldots, e_n)$ base de $E$ alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(f(e_1) \ldots f(e_n)\big)$
   - Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels. Il existe une et une unique application linéaire $f : E \to F$ définie par ses images sur une base de $E$.

- **Le théorème du rang n'est pas encore au programme.**

**Questions de cours (démonstrations à connaître)**

- **Espaces vectoriels** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  1. Soit $E$ un ev de dim finie $n$. Montrer que : toute famille libre de $n$ éléments est génératrice.
  2. Soit $E$ un ev de dim finie $n$. Montrer que : toute famille génératrice de $n$ éléments est libre.
- **Applications linéaires** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels.
  1. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
  2. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que $f$ injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
  3. Soit $E_1$ sev de $E$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que : $f(E_1)$ est un sev de $F$.
  4. Soit $(e_1, \dots e_n)$ une famille génératrice de $E_1$. Montrer que $f(E_1) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1) \dots f(e_n)\big)$.