Programme de khôlle MPSI n°19 - du 10/03/25 au 14/03/25

1. Espaces vectoriels

   - Définition d'espace vectoriel
   - Exemples classiques d'espaces vectoriels
   - Définition et caractérisation de sous-espace vectoriel
   - Combinaisons linéaires
   - Sous-espace vectoriel engendré par une partie A ($\neq \emptyset$) de E notation $\mathrm{Vect}(A)$, caractérisation de $\mathrm{Vect}(A)$ (comme ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A)
   - Familles génératrices, libres, bases
   - Bases canoniques
   - Somme de deux sous-espaces vectoriels $E_1 + E_2$: définition et caractérisation (ensemble des sommes d'un élément de E_1 et un élément de E_2)
   - Somme directe de deux sous-espaces vectoriels
   - Sous-espaces supplémentaires
   - Espaces vectoriels de dimension finie
   - Relation entre cardinal d'une famille génératrice et cardinal d'une famille libre (en dim finie)
   - Cardinal d'une familles libre / génératrice / base en dimension finie
   - Théorème de la base extraite
   - Théorème de la base incomplète
   - Dimension d'un sous-espace vectoriel
   - Existence du supplémentaire (en dim finie)
   - E_1 et E_2 supplémentaires dans $E \iff$ la juxtaposition d'une base de E_1 et une base de E_2 donne une base de E

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Espaces vectoriels** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

  1. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
  2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que pour tout $x \in E$ il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
  3. La somme $E_1 + E_2$ est directe si, et seulement si, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
  4. Soit E un ev de dim finie n. Montrer que : toute famille libre de n éléments est génératrice.
  5. Soit E un ev de dim finie n. Montrer que : toute famille génératrice de n éléments est libre.