**Programme de khôlle MPSI n°17** - du 10/02/25 au 14/02/25

1. <u>Polynômes et fractions rationnelles</u>

   - Polynômes : définitions et opérations
   - Dégré d'un polynôme
   - Dérivation
   - Division euclidienne
   - Racines d'un polynôme
   - Racines d'un polynôme à coefficients entiers
   - Méthode de Hörner pour l'évaluation polynomiale
   - Relations coefficients-racines
   - Ordre de multiplicité d'une racine
   - Formule de Taylor polynomiale
   - Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$
   - Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$
   - Théorème de d'Alembert-Gauss
   - Polynômes d'interpolation de Lagrange
   - Corps des fractions rationnelles : forme irréductible, dégré, racines, pôles, partie entière d'une fraction rationnelle
   - Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle (et applications : calcul d'intégrales, sommes, dérivées $n$-èmes ...)

2. <u>Analyse asymptotique : fonctions</u>

   - Relations entre fonctions au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ : négligéable, équivalent, domination, propriétés et exemples
   - Formules de Taylor-Young (sans démonstration)
   - Développements limités
   - Développements limités généralisés
   - Application des DL pour le calcul de limites, équivalents, équation d'une tangente ou d'une asymptote oblique

**Questions de cours (démonstrations à connaître)**

- **Polynômes**

  1. $a$ est racine de $P$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$ (c'est-à-dire si $(X-a)$ divise $P$).
  2. Si $\deg P \leq n$ et $P$ possède au moins $(n+1)$ racines distinctes, alors $P$ est le polynôme nul.
  3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $\alpha$ une racine d'ordre de multiplicité (exactement) 2 de $P$.
     Montrer qu'alors $P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$. *(→ Exercice 8 du cours)*
  4. Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
  5. Savoir énoncer et justifier quels sont les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
  6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que

  $$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

  7. (On admet le résultat de la question précédente)
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts, et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.
     Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

- **Analyse asymptotique**

  1. **Connaître les DL** en 0 de $e^x, \cos x, \sin x, (1+x)^\alpha, \dfrac{1}{1+x}, \dfrac{1}{1-x}, \ln(1+x)$.