Programme de khôlle MPSI n°15 - du 27/01/25 au 31/01/25

1. Calcul matriciel

   - Opérations entre matrices : somme, produit, combinaison linéaire
   - Propriétés du produit matriciel (bilinéarité, associativité)
   - Matrices triangulaires supérieures/inferieures, matrices diagonales (le produit de deux matrices triangulaires sup/inf est une matrice triangulaire sup/inf)
   - Matrices inversibles ($A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible si $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$)
   - Calcul de l'inverse d'une matrice (avec les opérations sur les lignes/ avec un système)
   - Critère d'inversibilité pour les matrices triangulaires (sans démonstration)
   - Transposée d'une matrice, opérations sur les transposées
   - Matrices symétriques et antisymétriques (définition seulement)
   - Matrices élémentaires, produit de matrices élémentaires
   - Structure d'anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
   - Formule du binome de Newton (lorsque $AB = BA$)
   - Systèmes linéaires : écriture matricielle, systèmes homogènes/ non homogènes, pivot de Gauss
   - **Note aux khôlleurs : On n'a pas encore parlé d'espaces vectoriels/applications linéaires/rang...**

2. Arithmétique

   - Divisibilité : diviseurs, multiples, nombres associés
   - Division euclidienne
   - PGCD
   - Algorithme d'Euclide
   - Coefficients de Bézout
   - Algorithme d'Euclide étendu
   - PPCM, propriétés
   - entiers premiers entre eux
   - PGCD d'un nombre fini d'éléments (généralisation de Bézout)
   - Nombres premiers
   - Crible d'Eratosthène
   - Théorème fondamental de l'arithmétique
   - Valuation p-adique, propriétés
   - Congruences
   - Petit théorème de Fermat

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Calcul matriciel**

  1. Soient $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Montrer que $\boxed{A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC}$
  2. Soient $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que $\boxed{(AB)C = A(BC)}$
  3. Soient $B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\boxed{(BC)^T = (C)^T (B)^T}$

- **Arithmétique**

  1. Soient a et b deux entiers naturels, $b \neq 0$. On suppose $a = bq + r$, avec $(q, r) \in \mathbb{N}^2$. Alors $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$ et en particulier $a \wedge b = b \wedge r$.
  2. a premier avec b et a premier avec $c \Rightarrow a$ premier avec bc.
  3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}^n)^*$ il existe $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que

     $$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$$

     (on admet l'identité de Bézout pour deux éléments)
  4. L'ensemble des nombres premiers est infini