Programme de khôlle MPSI n°12 - du 06/01/25 au 10/01/25

1. Limites et continuité
   - Limite en un point, continuité en un point
   - Limites à droite/à gauche en un point, continuité à droite/à gauche en un point.
   - Limites en $\pm\infty$
   - Unicité de la limite
   - Caractérisation séquentielle de la limite
   - Opérations sur les limites
   - Propriétés liées à l'ordre (en particulier : théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone)
   - Prolongement par continuité
   - Calcul de limites avec le taux d'accroissement
   - Théorème des valeurs intermediaires
   - Image d'un intervalle par une fonction continue (en particulier lorsqu'il s'agit d'un segment)
   - Théorème de la bijection monotone
   - Limites de fonctions complexes
2. Dérivabilité
   - Dérivabilité à gauche/à droite en un point
   - Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée
   - Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable
   - Dérivabilité et continuité
   - Interprétation géométrique : tangente
   - Extremum local, point critique
   - Théorème de Rolle
   - Égalité des accroissements finis.
   - Inégalité des accroissements finis.
   - Fonctions lipschitziennes
   - Fonctions contractantes et suites définies par récurrence

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Limites, continuité**

  1. **Définitions du cours :** limites finies/infinies pour $x \to a, x \to \pm\infty$, continuité en un point, limite à droite/gauche, continuité à droite/gauche, prolongement par continuité
  2. Unicité de la limite
  3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. Alors, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I et tendant vers a on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$. (démonstration vue dans le cas a et ℓ finis).
  4. Soient $\lambda, \mu, \ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \ell + \mu \ell'$.

- **Dérivabilité**

  1. **Connaître les définitions et les enoncés du cours**
  2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$ un point de l'intérieur de I, et soit f dérivable en a. Si f admet un extremum relatif en a, alors $f'(a) = 0$.
  3. théorème de Rolle : énoncé et démonstration.
  4. Montrer que si f dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[$ $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.