EXERCICE 48

1. On sait que $x$ est nilpotent, donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

   Mais alors :
$$(xy)^n = xy \cdot xy \cdot xy \cdots xy = x^n \cdot y^n = 0$$
   (on a utilisé le fait que $xy = yx$ sinon on n'aurait pas pu regrouper les x d'un côté et les $y$ de l'autre).

   On en déduit que $xy$ est nilpotent.

2. $x$ et $y$ sont nilpotents, donc $\exists (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x^n = 0$ et $y^m = 0$.

   Mais alors :
$$(x+y)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} x^k y^{n+m-1-k}.$$
   Soit $k \in [\![0, n+m-1]\!]$ : on regarde le $k$-ème terme de la somme : si $k \geqslant n$ alors $x^k = 0$ donc le terme s'annule. Si $k < n$ alors $n+m-1-k \geqslant m$ donc $y^{n+m-1-k} = 0$ et dans ce cas aussi le terme de la somme s'annule.

   On en déduit que la somme précédente est nulle et donc : $(x+y)^{n+m-1} = 0$. Donc $x+y$ est nilpotent.

3. Si $xy$ est nilpotent, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(xy)^n = 0$.

   Or, $(yx)^{n+1} = (yx)(yx)\cdots(yx) = y(xy)(xy)\ldots(xy)x = y \cdot (xy)^n x = 0$ (on a utilisé l'associativité du produit) donc $yx$ est nilpotent.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

   On a :
$$(1 - x^n) = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$
   (chapitre 2)

   Mais alors
$$(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1.$$
   De même,
$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1-x) = 1.$$
   On en déduit que $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$ est l'inverse multiplicatif de $(1-x)$ et donc $(1-x)$ est inversible.