EXERCICE 36

On fait un raisonnement par l'absurde.

Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation donnée. On suppose $|z| > 1$

On a donc $1 + z + \dots + z^{n-1} = nz^n$.

Mais alors $|1 + z + \dots + z^{n-1}| = n|z^n|$

Or, d'après l'inégalité triangulaire généralisée (qui s'obtient par une récurrence immédiate) :

$$|1 + z + \dots + z^{n-1}| \leq |1| + |z| + \dots + |z^{n-1}|$$

et comme $|z| > 1$ alors on a $|1| < |z| < |z^2| < \dots < |z^{n-1}| < |z^n|$.

En particulier, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $|z^k| < |z^n|$.

On en déduit que $|1| + |z| + \dots + |z^{n-1}| < n|z^n|$

et donc $|1 + z + \dots + z^{n-1}| < n|z^n|$, absurde.

Cela nous permet de conclure que toutes les solutions de l'équation donnée ont module inférieur ou égal à 1.

EXERCICE 41

On multiplie la première égalité par e^{-ix} . On obtient

$$1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)} = 0.$$

En posant $\alpha = y - x$ et $\beta = z - x$ cela devient :

$$1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0.$$

Puis, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} 1 + \cos \alpha + \cos \beta = 0 \\ \sin \alpha + \sin \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos \alpha + \cos \beta = 0 \\ \sin \alpha = -\sin \beta \end{cases}$$

Or $\sin \alpha = -\sin \beta$ si et seulement si ($\alpha \equiv -\beta [2\pi]$ ou $\alpha \equiv \beta + \pi [2\pi]$).

- Si $\alpha \equiv \beta + \pi [2\pi]$ alors on obtient $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ ce qui rend impossible la première équation du système.
- Si $\alpha \equiv -\beta [2\pi]$ on obtient $2 \cos \alpha = -1$ donc $\alpha = \frac{2}{3}\pi [2\pi]$ ou $\alpha = -\frac{2}{3}\pi [2\pi]$.

Mais alors $1 + e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} = 1 + \left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^2 + \left(e^{-i\frac{2}{3}\pi}\right)^2 = 1 + e^{i\frac{2}{3}\pi} + e^{i\frac{4}{3}\pi} = 0$ (vérifiez avec le cosinus et le sinus).

Donc $1 + e^{2i(y-x)} + e^{2i(z-x)} = 0$ par conséquent $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

(On aurait aussi pu remarquer que $j = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ est une racine cubique de l'unité et que $1 + j^2 + j^4 = 1 + j + j^2 = 0$).

EXERCICE 43

- On sait que j est une racine cubique de l'unité, donc $j^3 = 1$. Par conséquent j est une racine du polynôme $X^3 - 1$ or ce polynôme se factorise ainsi dans $\mathbb{R}$: $(X^3 - 1) = (X - 1)(1 + X + X^2)$. On peut donc en déduire que $(j - 1)(1 + j + j^2) = 0$ et comme $j \neq 1$, on en conclut que $1 + j + j^2 = 0$.
- Les autres racines cubiques de l'unité sont 1 et $e^{i\frac{4}{3}\pi} = j^2 = \bar{j}$.
- On développe S_1, S_2 et S_3 avec la formule du binôme de Newton :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k \quad S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k}.$$

Par conséquent

$$S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}).$$

Ensuite on sépare les cas suivant la valeur de k modulo 3 :

- Si $k \equiv 0 [3]$ alors $j^k = j^{3k'} = 1$ et $j^{2k} = j^{6k'} = 1$ donc $(1 + j^k + j^{2k}) = 3$.
- Si $k \equiv 1 [3]$ alors $j^k = j^{3k'+1} = j$ et $j^{2k} = j^{6k'+2} = j^2$ donc $(1 + j^k + j^{2k}) = (1 + j + j^2) = 0$.
- Si $k \equiv 2 [3]$ alors $j^k = j^{3k'+2} = j^2$ et $j^{2k} = j^{6k'+4} = j$ donc $(1 + j^k + j^{2k}) = (1 + j + j^2) = 0$.

On peut donc remarquer que les seuls termes non nuls de la somme étudiée sont ceux d'indice $k \equiv 0 [3]$. Par conséquent

$$S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{k \equiv 0 [3]} \binom{n}{k} \times 3 = 3 \sum_{k'=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k'}.$$

Mais alors

$$\sum_{k'=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} = \frac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3}$.

On remarque que $(1 + j^2) = \overline{(1 + j)}$ donc

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} = \frac{2^n + 2\operatorname{Re}((1+j)^n)}{3} = \frac{2^n + 2\operatorname{Re}((-j^2)^n)}{3} = \frac{2^n + 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{2}{3}\pi})^n}{3} = \boxed{\frac{2^n + 2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{3}}$$

EXERCICE 44

1. On pose $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$). On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a+ib+i}{a+ib-i} = \frac{a+i(b+1)}{a+i(b-1)} = \frac{(a+i(b+1))(a-i(b-1))}{a^2+(b-1)^2} \\ &= \frac{(a^2+(b^2-1))+i(a(b+1)-a(b-1))}{a^2+(b-1)^2} \\ &= \frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2} + i \frac{2a}{a^2+(b-1)^2} \end{aligned}$$

2. $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2+b^2=1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$.

3.

$$\begin{aligned} |z+i| = |z-i| &\Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}+i) = (z-i)(\bar{z}-i) \\ &\Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i) = (z-i)(\bar{z}+i) \\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1 = z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1 \\ &\Leftrightarrow 2i\bar{z} = 2iz \\ &\Leftrightarrow \bar{z} = z \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{z+i}{z-i} = z &\Leftrightarrow z+i = z^2-iz \\ &\Leftrightarrow z^2+(-i-1)z-i = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant de l'équation de second degré obtenue :

$$\Delta = (i+1)^2 - 4(-i) = -1+1+2i+4i = 6i.$$

On détermine les racines carrées de $6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$: on trouve $\pm\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{3}(1+i)$.

Donc on obtient

$$f(z) = z \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{(1+i)+\sqrt{3}(1+i)}{2}, \frac{(1+i)-\sqrt{3}(1+i)}{2} \right\} \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{2}, \frac{(1-\sqrt{3})(1+i)}{2} \right\}$$