EXERCICE 39

On fait un raisonnement par l'absurde.
Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation donnée. On suppose $|z| > 1$
On a donc $1 + z + \cdots + z^{n-1} = nz^n$.
Mais alors $\left|1 + z + \cdots + z^{n-1}\right| = n\left|z^n\right|$
Or, d'après l'inégalité triangulaire généralisée (qui s'obtient par une récurrence immédiate) :

$$\left|1 + z + \cdots + z^{n-1}\right| \leqslant |1| + |z| + \cdots + \left|z^{n-1}\right|$$

et comme $|z| > 1$ alors on a $|1| < |z| < \left|z^2\right| < \cdots < \left|z^{n-1}\right| < |z^n|$.
En particulier, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $\left|z^k\right| < |z^n|$.
On en déduit que $|1| + |z| + \cdots + \left|z^{n-1}\right| < n|z^n|$
et donc $\left|1 + z + \cdots + z^{n-1}\right| < n|z^n|$, absurde.
Cela nous permet de conclure que toutes les solutions de l'équation donnée ont module inférieur ou égal à 1.

EXERCICE 44

On multiplie la première égalité par e^{-ix}. On obtient

$$1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)} = 0.$$

En posant $\alpha = y - x$ et $\beta = z - x$ cela devient :

$$1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0.$$

Puis, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} 1 + \cos\alpha + \cos\beta = 0 \\ \sin\alpha + \sin\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos\alpha + \cos\beta = 0 \\ \sin\alpha = -\sin\beta \end{cases}$$

Or $\sin\alpha = -\sin\beta$ si et seulement si $\left(\alpha \equiv -\beta\ [2\pi] \text{ ou } \alpha \equiv \beta + \pi\ [2\pi]\right)$.

- Si $\alpha \equiv \beta + \pi\ [2\pi]$ alors on obtient $\cos\alpha + \cos\beta = 0$ ce qui rend impossible la première équation du système.
- Si $\alpha \equiv -\beta\ [2\pi]$ on obtient $2\cos\alpha = -1$ donc $\alpha = \dfrac{2}{3}\pi\ [2\pi]$ ou $\alpha = -\dfrac{2}{3}\pi\ [2\pi]$.

  Mais alors $1 + e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} = 1 + \left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^2 + \left(e^{-i\frac{2}{3}\pi}\right)^2 = 1 + e^{i\frac{2}{3}\pi} + e^{i\frac{4}{3}\pi} = 0$ (vérifiez avec le cosinus et le sinus).

  Donc $1 + e^{2i(y-x)} + e^{2i(z-x)} = 0$ par conséquent $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

  (On aurait aussi pu remarquer que $j = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ est une racine cubique de l'unité et que $1 + j^2 + j^4 = 1 + j + j^2 = 0$).

EXERCICE 46

1. On sait que j est une racine cubique de l'unité, donc $j^3 = 1$. Par conséquent j est une racine du polynôme $X^3 - 1$ or ce polynôme se factorise ainsi dans $\mathbb{R}$: $(X^3-1) = (X-1)(1+X+X^2)$. On peut donc en déduire que $(j-1)(1+j+j^2) = 0$ et comme $j \neq 1$, on en conclut que $1 + j + j^2 = 0$.

2. Les autres racines cubiques de l'unité sont 1 et $e^{i\frac{4}{3}\pi} = j^2 = \overline{j}$.

3. On développe S_1, S_2 et S_3 avec la formule du binôme de Newton :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k}.$$

   Par conséquent

$$S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 + j^k + j^{2k}\right).$$

   Ensuite on sépare les cas suivant la valeur de k modulo 3 :

   - Si $k \equiv 0\ [3]$ alors $j^k = j^{3k'} = 1$ et $j^{2k} = j^{6k'} = 1$ donc $(1 + j^k + j^{2k}) = 3$.
   - Si $k \equiv 1\ [3]$ alors $j^k = j^{3k'+1} = j$ et $j^{2k} = j^{6k'+2} = j^2$ donc $\left(1 + j^k + j^{2k}\right) = \left(1 + j + j^2\right) = 0$.
   - Si $k \equiv 2\ [3]$ alors $j^k = j^{3k'+2} = j^2$ et $j^{2k} = j^{6k'+4} = j$ donc $\left(1 + j^k + j^{2k}\right) = \left(1 + j + j^2\right) = 0$.

   On peut donc remarquer que les seuls termes non nuls de la somme étudiée sont ceux d'indice $k \equiv 0\ [3]$. Par conséquent

$$S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{k\equiv 0\ [3]} \binom{n}{k} \times 3 = 3 \sum_{k'=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k'}.$$

   Mais alors

$$\sum_{k'=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}.$$

   Il ne reste plus qu'à calculer $\dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{3} = \dfrac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3}$.

   On remarque que $(1 + j^2) = \overline{(1+j)}$ donc

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} = \frac{2^n + 2\mathrm{Re}\big((1+j)^n\big)}{3} = \frac{2^n + 2\mathrm{Re}\big((-j^2)^n\big)}{3} = \frac{2^n + 2\mathrm{Re}\big((e^{i\frac{\pi}{3}})^n\big)}{3} = \boxed{\frac{2^n + 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{3}}$$

EXERCICE 48

On cherche d'abord les racines carrées sous forme algébrique.
On pose $(a + ib)^2 = \sqrt{3} + i$.
On obtient le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= \sqrt{3} \\ 2ab &= 1 \\ a^2 + b^2 &= 2 \end{cases}$$

On obtient facilement $a^2 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$ et $b^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, donc les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ sont

$$\pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

On cherche ensuite à écrire ces mêmes racines carrées sous forme exponentielle. On a $\sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Donc ses racines carrées sont $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Par identification on a : $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$.
On peut donc conclure :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

Remarque : $2+\sqrt{3} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$ et $2-\sqrt{3} = \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{2}$ donc on peut aussi écrire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$