EXERCICE 31

- **Réflexive :** soit $(x, y) \in E$. Alors $(x, y) = (x, y)$ et donc $(x, y)R(x, y)$. Cette relation est bien réflexive.
- **Antisymétrique :** soient (x, y) et (x', y') deux éléments de E. On suppose $(x, y)R(x', y')$ et $(x', y')R(x, y)$.

  On a deux cas possibles :

  - Soit $(x, y) = (x', y')$ et l'antisymétrie est prouvée
  - Soit $(x, y) \neq (x', y')$ mais alors, comme $(x, y)R(x', y')$ on a : $\boxed{y \leqslant x'}$ et comme $(x', y')R(x, y)$ alors $\boxed{y' \leqslant x}$. D'autre part, d'après la définition de E, on sait que $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y'$. En composant les inégalités on obtient : $x \leqslant y \leqslant x' \leqslant y' \leqslant x$ mais alors $x = y = x' = y'$ et donc $(x, y) = (x', y')$ contradiction avec l'hypothèse initiale (donc ce deuxième cas est impossible).

  On conclut que $(x, y) = (x', y')$ et donc la relation est antisymétrique.
- **Transitive :** Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in E$ tels que $(x, y)R(x', y')$ et $(x', y')R(x'', y'')$. Comme $(x, y)R(x', y')$ on a deux cas possibles :

  - Soit $(x, y) = (x' y')$: mais alors $(x, y)R(x'', y'')$ et la transitivité est prouvée.
  - Soit $(x, y) \neq (x', y')$ et donc $y \leqslant x'$. On fait une nouvelle disjonction de cas pour $(x', y')R(x'', y'')$:
    - ∗ Soit $(x', y') = (x'', y'')$ et alors $(x, y)R(x'', y'')$ (transitivité prouvée dans ce cas aussi).
    - ∗ Soit $(x', y') \neq (x'', y'')$ mais alors $y' \leqslant x''$. Mais alors en composant les inégalités on obtient $y \leqslant x' \leqslant y' \leqslant x''$ et donc $y \leqslant x''$, mais d'après la définition de la relation on peut donc en déduire que $(x, y)R(x'', y'')$ ce qui prouve la transitivité.

  On a prouvé la transitivité dans tous les cas possibles.

On conclut que R est bien une relation d'ordre.
Ce n'est pas un ordre total : $(3, 2) \neq (1, 4)$ et « $2 \leqslant 1$ » fausse de même que « $4 \leqslant 3$ »