EXERCICE 24

1. - ($\Longrightarrow$) : montrons que si f injective alors $A \cup B = E$.

     On remarque que :
     $$\boxed{f(E)} = (A \cap E, B \cap E) = \boxed{(A,B)}$$
     et
     $$\boxed{f(A \cup B)} = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = \boxed{(A,B)}$$
     donc E et $A \cup B$ ont la même image par f, mais alors par injectivité de la fonction f, $A \cup B = E$.

   - ($\Longleftarrow$) : montrons que si $A \cup B = E$ alors f injective.

     Soient $(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$, tels que $f(X) = f(Y)$ i.e.
     $$\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$$
     mais alors $\boxed{X} = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = \boxed{Y.}$
     Donc f est injective.

2. - ($\Longrightarrow$) : montrons que si f surjective alors $A \cap B = \emptyset$.

     Comme f surjective, alors l'élément $(A, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ possède un antécedent $X \in \mathcal{P}(E)$.
     On a donc : $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$.
     Or : $\boxed{A \cap B} = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \emptyset = \boxed{\emptyset.}$

   - ($\Longleftarrow$) : montrons que si $A \cap B = \emptyset$ alors f est surjective.

     Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On cherche $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A', B')$.
     Pour $X = A' \cup B'$ on a :
     $$\boxed{f(X)} = \big((A' \cup B') \cap A, (A' \cup B') \cap B\big) = \big((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)\big) = \boxed{(A', B')}$$
     (car $A \cap A' = A'$ et $B' \cap A = \emptyset$, $B' \cap B = B'$ et $A' \cap B = \emptyset$) donc f est surjective.

EXERCICE 25

On va faire une démonstration par l'absurde.
Supposons qu'il existe une fonction $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjective.
Soit $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. $A \in \mathcal{P}(X)$, donc A possède un antécédent par f (c'est-à-dire : $\exists x \in X$ tel que $f(x) = A$).
On a deux cas possibles :

- Soit $x \in A$: dans ce cas, $x \notin f(x)$ (par définition de A) mais alors $x \notin A$ absurde.
- Soit $x \notin A$: dans ce cas, $x \in f(x)$ (par définition de A) mais alors $x \in A$, absurde.

Comme dans les deux cas possibles, on aboutit à une contradiction, on peut en déduire que notre hypothèse initiale était fausse, donc il n'existe pas de fonction f surjective de X dans $\mathcal{P}(X)$.
(il s'agit d'un théorème de Cantor).