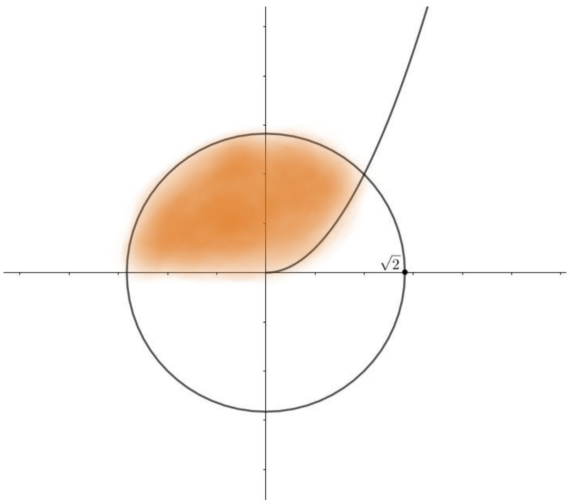
EXERCICE 202

On remarque que A est le disque de centre l'origine et rayon $\sqrt{2}$.
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq x^2\right\}$.



Il faudra donc additionner un quart du disque et l'intersection du quart du disque du premier cadran avec les points au dessus de la parabole $y = x^2$.

$\mathscr{A}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 + \displaystyle\int_0^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2)\,\mathrm{d}x$.

Or, $\displaystyle\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{2-x^2} + \int \frac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{2-x^2} - \int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

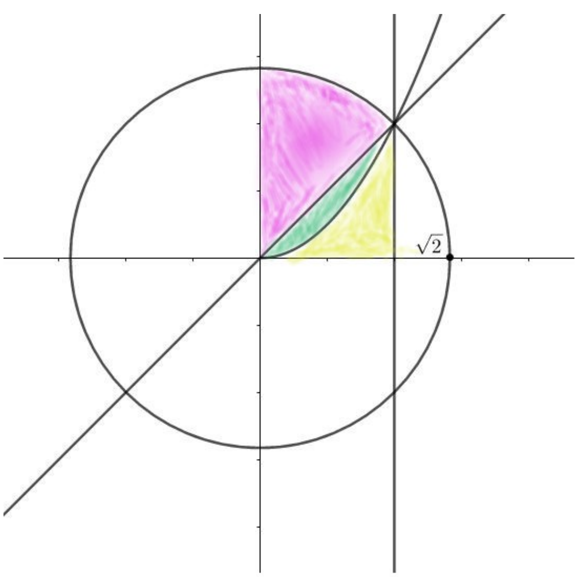
(On a fait une IPP puis un changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$).

Donc $2\displaystyle\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{2-x^2} + 2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ et enfin

$$\boxed{\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).}$$

Donc en remplaçant : $\mathscr{A}(A \cap B) = \dfrac{\pi}{2} + \left[\dfrac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{3}{4}\pi + \dfrac{1}{6}.}$

Deuxième méthode (pour ceux qui n'aiment pas les intégrales compliquées...) : On trace les droites $y = x$ et $x = 1$



On remarque que pour l'aire de la partie rose est $\frac{1}{8}$ de l'aire du disque de rayon $\sqrt{2}$, et que l'aire en vert est égale à l'aire d'un triangle rectangle de base et hauteur 1 (cette aire vaut un demi) moins l'aire de la partie en jaune (c'est l'intégrale $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$). On a donc

$$\mathscr{A}(A\cap B) = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 + \frac{1}{8}\pi(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}\cdot\pi\cdot 2 + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}$$

EXERCICE 203

1. On sait que $\forall t\in\mathbb{R},\ 0 \leq \left|\sin(t^2)\right| \leq 1$.

   Si $x \geq 0$ on a donc $0 \leq \left|\int_{-x}^{x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-x}^{x}\left|\sin(t^2)\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_{-x}^{x} 1\,\mathrm{d}t$ donc $0 \leq \left|\int_{-x}^{x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2x$

   Si $x < 0$ (dans ce cas l'intégrale est négative car $-x > x$) on peut inverser les bornes :

$$0 \leq \left|\int_{x}^{-x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x}^{-x}\left|\sin(t^2)\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_{x}^{-x}\,\mathrm{d}t = -2x$$

   On en déduit que :

$$0 \leq \left|\int_{-x}^{x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2\,|x|$$

   Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\boxed{\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t = 0}$.

2. La fonction ln étant croissante sur $]0,+\infty[$, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t\in[x,2x]$, $\ln(x)\leq\ln(t)\leq\ln(2x)$, donc

$$\frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

   Par croissance de l'intégrale (appliquée à la première inégalité) on obtient :

$$\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(2x)}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

   c'est-à-dire :

$$\frac{x}{\ln(2x)} \leq \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

   Or, d'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(2x)} = +\infty$, donc par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = +\infty}.$$

3. On fait une IPP en posant $u = \frac{1}{t}$ et $v' = \sin(t)$ (on a donc $u' = -\frac{1}{t^2}$ et $v = -\cos(t)$, avec u et v des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{\cos(t)}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos(2x)}{2x} - \int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   On remarque que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x} = 0$ (car cos est bornée)

   de plus,

$$\left|\int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{2x}\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{x}-\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$$

   et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$ donc on peut conclure que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0}$$

EXERCICE 204

1. Pour $y \geq x \geq 0$ on a
$$(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2 = y+x-2\sqrt{xy} \leq y-x$$
donc $\sqrt{y}-\sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$.
Par symétrie, pour $x \geq y \geq 0$ on a $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$ donc on obtient
$$\boxed{\forall x, y \geq 0, \quad \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|} \leq \sqrt{\left|y-x\right|}$$
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \varepsilon^2 > 0$. On a
$$\forall x, y \geq 0, \quad \left|y-x\right| \leq \delta \Rightarrow \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leq \sqrt{\left|y-x\right|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon,$$
donc la fonction est uniformément continue.

2. Faisons une démonstration par l'absurde. Supposons $x \mapsto \ln x$ uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par définition, pour $\varepsilon = 1$, il existe un $\delta > 0$ tel que :
$$\forall x, y > 0, \quad \left|y-x\right| \leq \delta \Rightarrow \left|\ln(y)-\ln(x)\right| \leq \varepsilon$$
Mais, en posant $y = x+\delta$, on a
$$\left|\ln(y)-\ln(x)\right| = \ln\left(\frac{x+\delta}{x}\right)$$
et cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+, il est donc absurde d'affirmer que $\left|\ln(y)-\ln(x)\right| \leq 1$.
On conclut que $x \mapsto \ln(x)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 205

Soit A l'ensemble des entiers naturels n tels que il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ adaptée à f. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un minimum p. Il existe donc une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_p)$ adaptée à f.
Montrons que toute subdivision $\sigma' = (y_0, \ldots, y_n)$ adaptée à f est plus fine que σ.
Par absurde, supposons qu'il existe $i \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $x_i \notin \{y_0, \ldots, y_n\}$. Alors il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \in \left]y_{j-1}, y_j\right[$.
Comme σ et σ' sot adaptées à f, alors f est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$ et $]x_i, x_{i+1}[$, mais aussi sur $]y_{j-1}, y_j[$, donc f est constante sur $]x_{i-1}, x_{i+1}[$, mais alors la subdivision $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ est adaptée à f, ce qui contredit la minimalité de p. Absurde.