EXERCICE 191

Montrons que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le p-cycle $\big(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p)\big)$.

- En effet si $x = \sigma(a_i)$ ($i \in [\![1,p]\!]$) alors on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = (\sigma \circ c)(a_i) = \sigma(a_{i+1})$$

  (où l'on pose $a_{p+1} = a_1$ comme d'habitude).

- D'autre part, si $x \notin \{\sigma(a_i); i \in [\![1,p]\!]\}$ alors $\sigma^{-1}(x) \notin \{a_1, \dots, a_p\}$ et donc $(c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma^{-1}(x)$ (car $\sigma^{-1}(x)$ n'appartient pas au support de c). Mais alors $(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = (\sigma \circ \sigma^{-1})(x) = x$.

EXERCICE 192

- Montrons que H est stable par $\circ$:

  Si σ_1 et $\sigma_2 \in H$ alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(k) + (\sigma_1 \circ \sigma_2)(n+1-k) = \sigma_1(\sigma_2(k)) + \sigma_1(\sigma_2(n+1-k)) = \sigma_1(n+1-\sigma_2(n+1-k)) + \sigma_1(\sigma_2(n+1-k))$$

  et en posant $k' = \sigma_2(n+1-k)$ on obtient

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(k) + (\sigma_1 \circ \sigma_2)(n+1-k) = \sigma_1(n+1-k') + \sigma_1(k') = n+1.$$

  Donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in H$.

- Id appartient à H :

  Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $\mathrm{Id}(k) + \mathrm{Id}(n+1-k) = n+1$ donc $\mathrm{Id} \in H$.

- Montrons que pour tout $\sigma \in H$, σ^{-1} appartient aussi à H :

  Soit $\sigma \in H$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a

$$n+1 = \mathrm{Id}(k) + \mathrm{Id}(n+1-k) = \sigma^{-1}(\sigma(k)) + \sigma^{-1}(\sigma(n+1-k)) = \sigma^{-1}(\sigma(k)) + \sigma^{-1}(n+1-\sigma(k))$$

  on pose $\alpha = \sigma(k)$ (α parcourt tous les éléments de $[\![1,n]\!]$) et on obtient

$$\forall \alpha \in [\![1,n]\!], \quad \sigma^{-1}(\alpha) + \sigma^{-1}(n+1-\alpha) = n+1.$$

EXERCICE 193

1. Comme l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée ont le même cardinal, il suffit de montrer que φ est surjective. Or $\forall \sigma \in S_n$ on a $\varphi(\tau \circ \sigma) = \tau \circ \tau \circ \sigma = \sigma$, donc φ est bien surjective et donc bijective.

2. On remarque que l'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ transforme les permutations paires (i.e. les éléments de $\mathscr{A}_n$) en permutations impaires (i.e. les éléments de $S_n \setminus \mathscr{A}_n$).

   Comme φ est une bijection, alors on a $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_n) = \mathrm{Card}(S_n \setminus \mathscr{A}_n)$.

   Or S_n est union disjointe de $\mathscr{A}_n$ et $S_n \setminus \mathscr{A}_n$, donc $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_n) = \mathrm{Card}(S_n \setminus \mathscr{A}_n) = \dfrac{\mathrm{Card}(S_n)}{2} = \dfrac{n!}{2}$.

EXERCICE 194

1. • Montrons que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:
 La fonction nulle appartient à V (il suffit de prendre P le polynôme nul, et de considérer la fonction $x \mapsto e^x P(x)$) donc $\boxed{V \neq \emptyset}$
 Montrons que V est stable par combinaison linéaire : soient f_1 et f_2 deux fonctions dans V, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Comme f_1 et f_2 appartiennent à V, alors il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que
 $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = e^x P(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^x Q(x)$$
 mais alors
 $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f_1 + \lambda f_2)(x) = e^x P(x) + \lambda e^x Q(x) = e^x \left(P(x) + \lambda Q(x)\right)$$
 on remarque ensuite que $P+\lambda Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (par combinaison linéaire de polynômes de degré $\leq n$) et donc $\left(f_1 + \lambda f_2\right) \in V$.
 Mais alors V est stable par combinaison linéaire, et donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
 • Déterminons une base de V :
 On considère la famille : $\left(f_0, f_1, \dots, f_n\right)$ définie par
 $$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{f_k(x) = e^x \cdot x^k}$$
 On voit facilement qu'il s'agit d'une famille génératrice de V. En effet, soit $f \in V$, alors il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
 $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x P(x)$$
 mais $P(x)$ est de la forme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, donc on peut écrire
 $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 e^x + a_1 x e^x + a_2 x^2 e^x + \dots a_n x^n e^x$$
 D'autre part, $\left(f_0, f_1, \dots, f_n\right)$ est une famille libre.
 En effet, soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
 $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_0 e^x + \lambda_1 x e^x + \lambda_2 x^2 e^x + \dots \lambda_n x^n e^x = 0$$
 alors
 $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \left(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n\right) = 0$$
 et comme la fonction exponentielle est toujours strictement positive, on en déduit que
 $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$
 mais un polynôme ayant une infinité de racines est forcément le polynôme nul, donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
 On en déduit que la famille $\left(f_0, f_1, \dots, f_n\right)$ est libre, et donc une base de V.
 Mais alors $\boxed{\dim(V)} = \operatorname{Card}\left(f_0, f_1, \dots, f_n\right) = \boxed{n+1}$

2. On sait que la dérivée est une application linéaire. Calculons les images des f_k par D :
 $(e^x)' = e^x$, donc $D(f_0) = f_0$
 $(xe^x) = e^x + xe^x$ donc $D(f_1) = f_0 + f_1$
 $(x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$ donc $D(f_2) = 2f_1 + f_2$
 …
 $(x^k e^x)' = kx^{k-1} e^x + x^k e^x$ donc $D(f_k) = k f_{k-1} + f_k$ (formule vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$)
 On remarque que l'image de chacun des f_k est une combinaison linéaire d'éléments de V, donc $D(V) \subset V$. L'ensemble d'arrivée de D est bien V donc D est un endomorphisme.
 De plus, on peut écrire la matrice de D dans la base $\left(f_0, f_1, \dots, f_n\right)$:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0&\dots&\dots&\dots&&0\\0&1&2&0&\dots&\dots&&0\\0&0&1&3&0&\dots&&0\\0&0&0&1&\ddots&\ddots&&0\\&&&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&&\ddots&\ddots&0\\&&&&&&1&n\\0&&\dots&&\dots&&0&1\end{pmatrix}$$

On voit que M est une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 1 sur la diagonale.

On en déduit que $\det(M)=1$ et donc $\det(D)=1$.

EXERCICE 197

1. On remarque que $(1,i)$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   Pour $a,b\in\mathbb{C}$, l'application $\varphi_{a,b}:z\mapsto az+b\overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice dans la base $(1,i)$ est

   $$A=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(a)+\mathrm{Re}(b)&\mathrm{Im}(b)-\mathrm{Im}(a)\\\mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b)&\mathrm{Re}(a)-\mathrm{Re}(b)\end{pmatrix}.$$

   D'autre part si f est un endomorphisme quelconque de $\mathbb{C}$, alors sa matrice sera de la forme

   $$B=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{pmatrix}.$$

   On pose $A=B$ et on obtient le système

   $$\begin{cases}\mathrm{Re}(a)+\mathrm{Re}(b)=\alpha\\\mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b)=\beta\\\mathrm{Im}(b)-\mathrm{Im}(a)=\gamma\\\mathrm{Re}(a)-\mathrm{Re}(b)=\delta\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a=(\alpha+\delta)/2+i(\beta-\delta)/2\\b=(\alpha-\delta)/2+i(\beta+\gamma)/2\end{cases}$$

   donc tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $\varphi_{a,b}$.

2. $\mathrm{Det}(f)=\alpha\delta-\beta\gamma=|a|^2-|b|^2$.

EXERCICE 198

1. On a $AA^{-1}=I_n$, donc $\det(A)\det(A^{-1})=1$. Or $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ appartiennent à $\mathbb{Z}$ et les seuls nombres inversibles dans $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1. Par conséquent $\det A=\pm1$.

2. On considère la fonction $P(x)=\det(A+xB)$. C'est une fonction polynômiale de degré $\leq n$.

   Pour tout $x\in\{0,1,\dots,2n\}$ on a $P(X)=\pm1$ donc $P^2(X)-1=0$. Il en suit que P^2-1 possède au moins $2n+1$ racines (et son degré est $\leq 2n$) donc P^2-1 est le polynôme nul.

   Mais alors $P(X)=\pm1,\ \forall X\in\mathbb{R}$.

   Pour $X=0$ on obtient $\det(A)=\pm1$.

   Pour $X\to+\infty$ on obtient $\det\left(\frac{1}{X}A+B\right)=\frac{P(X)}{X^n}\to0$. Donc $\det(B)=0$.