EXERCICE 176

On remarque que f est bien définie car il existe une et une unique application définie par ses images sur une base de $\mathbb{R}^4$ (ici (e_1,e_2,e_3,e_4)).
Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$f(x,y,z,t)=f(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4)=x(2,0,1,0)+y(0,-1,0,1)+z(1,0,2,0)+t(0,1,0,-1)$$

Pour déterminer le noyau on considère le système

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z/2 \\ y = t \\ -z/2+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = t \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(0,1,0,1)$.
D'autre part, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\big((2,0,1,0),(0,-1,0,1),(1,0,2,0),(0,1,0,-1)\big)=\mathrm{Vect}\big((2,0,1,0),(0,-1,0,1),(1,0,2,0)\big)$. On a donc une famille génératrice de trois éléments, mais d'après le théorème du rang, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)=3$, donc il s'agit d'une base.

EXERCICE 178

1. (a) Comme f est continue, alors elle admet une primitive ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\phi(x+1)-\phi(x)$ et donc F est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $F'(x)=\phi'(x+1)-\phi'(x)=f(x+1)-f(x)$.

   (b) On obtient
$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-x & \text{si } x<0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}-x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{3}x^{3/2} & \text{si } x\in[0,1[\\[2ex] \dfrac{2}{3}\left(x^{3/2}-(x-1)^{3/2}\right) & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

2. (a) Si $F=T(f)$ alors on a vu que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc $T(f)$ appartient bien à E.
D'autre part, soient $f,g\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On pose $\Phi=T(f+\lambda g)$, $F=T(f)$ et $G=T(g)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\Phi(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+1}f(t)\,\mathrm{d}t+\lambda\int_x^{x+1}g(t)\,\mathrm{d}t=(T(f))(x)+\lambda(T(g))(x)$. Donc T est linéaire.

   (b)
   - Avec les notations des questions précedentes : $T(f)=0 \Leftrightarrow F(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \displaystyle\int_x^{x+1}f(t)\,\mathrm{d}t=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \phi(x+1)=\phi(x)\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \phi$ est 1-périodique. Soit $\phi: x\mapsto\sin(2\pi x)$. Φ est 1-périodique mais $f=\phi'$ n'est pas l'application nulle, donc T n'est pas injective.
   - On a vu que $\forall f\in E,\ T(f)\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ or $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\neq E$ (il y a des fonctions continues qui ne sont pas $\mathscr{C}^1$), donc T n'est pas surjective.

3. (a) On reprend les résultats de la question précedente : $f\in\mathrm{Ker}\,T \Rightarrow \phi(x+1)=\phi(x) \Leftarrow f(x+1)=f(x)$ i.e. f est 1-périodique (en dérivant). D'autre part si f est 1-périodique et que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$ alors $f\in\mathrm{Ker}(T)$.
Donc $\mathrm{Ker}(T)=\left\{f\in E\,\middle|\, f\ 1-\text{périodique et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$.

   (b) $T(f_a)=F_a$ avec $F_a(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}e^{at}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_x^{x+1}=\frac{e^a-1}{a}e^{ax}$. Donc $\lambda_a=\dfrac{e^a-1}{a}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\lambda_a=0$ et $\lim_{a\to+\infty}\lambda_a=+\infty$ et λ_a est une fonction continue, donc par le théorème des valeurs intermediaires λ_a atteint toutes les valeurs strictement positives.

EXERCICE 181

1. On remarque d'abord que, comme $p \in \mathscr{L}(E)$, alors $\mathrm{Id} - p \in \mathscr{L}(E)$.

   Si $p \circ p = p$ alors $(\mathrm{Id} - p) \circ (\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Id} - 2p + p \circ p = \mathrm{Id} - p$ donc $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur.

   Si $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur alors $(\mathrm{Id} - p) \circ (\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Id} - p$ mais alors $\mathrm{Id} - 2p + p \circ p = \mathrm{Id} - p$, c'est-à-dire $p \circ p = p$ et donc p est un projecteur.

2. Soit p le projecteur par rapport à F parallélement à G (avec $E = F \oplus G$). On sait que pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$ et que $p(x) = x_F$.

   Mais alors $(\mathrm{Id} - p)(x) = x_G$. On en déduit que $\mathrm{Id} - p$ est le projecteur par rapport à G et parallélement à F. Par conséquent $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = F = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = G = \mathrm{Ker}(p)$.

EXERCICE 182

- Montrons que $\boxed{\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)}$.

  On sait d'après les hypothèses que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$ et d'après le théorème du rang, que $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim(\mathrm{Im}\, g)$.

  Montrons ensuite que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$: soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $x = \mathrm{Id}(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x)$ (car $f(x) = 0$).

  Donc $x \in \mathrm{Im}(g)$, d'où $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$, et comme ces deux sous-espaces ont la même dimension, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

- Montrons que f est un projecteur.

  $f \circ g = 0$, mais $f = f \circ \mathrm{Id} = f \circ (f + g) = f \circ f + f \circ g = f \circ f$. Donc $f \circ f = f$ et donc f est un projecteur.

- $g = \mathrm{Id} - f$ donc g est le projecteur complémentaire de f (voir exercice 181).

EXERCICE 183

- $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$(car p et q commutent) donc $\underline{p \circ q \text{ est un projecteur.}}$

- $\underline{\text{Montrons que } \mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q).}$

  Soit $x \in \mathrm{Ker} p + \mathrm{Ker} q$ alors $x = u + v$ (avec $u \in \mathrm{Ker} p$ et $v \in \mathrm{Ker} q$). Mais alors $(p \circ q)(x) = (p \circ q)(u + v) = (p \circ q)(u) + (p \circ q)(v) = (q \circ p)(u) + (p \circ q)(v) = q(p(u)) + p(q(v)) = q(0) + p(0) = 0$. donc $\mathrm{Ker} p + \mathrm{Ker} q \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

  Inversement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker} p$ et $v \in \mathrm{Im} p$ (p est un projecteur donc $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$). Mais alors $0 = (p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = (q \circ p)(u + v) = (q \circ p)(u) + (q \circ p)(v) = (q \circ p)(v) = q(v)$. Donc $q(v) = 0$ par conséquent $v \in \mathrm{Ker} q$ et donc $x \in \mathrm{Ker} p + \mathrm{Ker} q$ ce qui nous permet de conclure que

  $$\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker} p + \mathrm{Ker} q.$$

- $\underline{\text{Montrons que } \mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q.}$

  Soit $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = (p \circ q)(x)$ i.e. $y = p(q(x)) \in \mathrm{Im} p$ et $y = q(p(x)) \in \mathrm{Im} q$ donc $y \in \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q$.

  Inversement, si $y \in \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$ et comme $y = p(y) = (p \circ q)(x) \in \mathrm{Im}(p \circ q)$.

  Donc
  $$\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q.$$

EXERCICE 184

Par contraposée : si $\mathscr{B}$ n'était pas une base de E alors on aurait $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \neq E$. Mais alors il existerait un hyperplan H contenant $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Soit f une forme linéaire non nulle telle que $\mathrm{Ker}(f) = H$. Alors on aurait $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$ mais $f \neq 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.