EXERCICE 154

1. On remarque d'abord que f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ par produit et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{D}_f, \quad f'(x) = \frac{1-x-x^2}{(x+1)^2} e^{-x}$$

On étudie le signe de $1-x-x^2$: ce polynôme s'annule pour $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, il est positif entre les deux et négatif à l'extérieur. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	$+\infty$
				$-\infty$	0
				↗	$f(x_2)$
				↘	0

On voit dans le tableau de variations que la fonction a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et une asymptote verticale (bilatérale) d'équation $x = -1$.

On étudie la branche infinie en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy) en $-\infty$.

2. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas), composition et produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathcal{D}_g, \quad g'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}}$$

On étudie le signe de $x(x-3)$ et on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	+
g	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$
				$+\infty$	$+\infty$
				↘	$4e^{3/2}$
				↗	$+\infty$

On remarque que $\mathcal{C}_g$ possède une asymptote verticale (bilatérale) d'équation $x = 1$.

On étudie les branches infinies :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e$$

Il reste à calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ex$. Pour cela on s'aidera d'un DL :

On pose $h = \frac{1}{x}$ $h \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\exp\left(\frac{x}{x-1}\right) = \exp\left(\frac{1/h}{1/h-1}\right) = \exp\left(\frac{1}{1-h}\right) = \exp(1+h+o(h)) = \exp(1)\exp(h) = e \cdot (1+h+o(h))$$

$$\text{Donc } f(x) - ex = (x+1)\left(e + e \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - ex = 2e + \frac{e}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 2e \text{ lorsque } x \rightarrow \pm\infty.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = ex + 2e$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

EXERCICE 155

On calcule un développement limité de f au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - x + o(x^4)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$ et (en regardant le coefficient de x) que la fonction $\tilde{f}$ prolongée en 0 est dérivable en 0 avec $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{3}$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$ et la courbe est en dessous de sa tangente.

EXERCICE 156

- Au voisinage de 0 : $\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

On en déduit que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 1$ (en comparant avec la formule de Taylor-Young) et la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = x$ (la courbe étant au dessus de sa tangente).

- Au voisinage de 1 : on pose $x = 1+h$ ($x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x+x^2) = \ln(1+(1+h)+(1+h)^2) = \ln(3+3h+h^2) = \ln\left(3\left(1+h+\frac{h^2}{3}\right)\right) = \ln(3) + \ln\left(1+h+\frac{h^2}{3}\right) \\ &= \ln(3) + \left(h + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2 + o(h^2) = \ln(3) + h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^2) = \ln(3) + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

On en déduit que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = \ln 3 + (x-1)$ et que la courbe est en dessous de sa tangente.

EXERCICE 157

1. Soit $k \geq 1$. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Donc en intégrant sur $[k, k+1]$ on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt \Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

D'autre part, pour $k \geq 2$, on a, pour tout $t \in [k-1, k]$:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

d'où :

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{k}} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{t}} dt \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

2. On a $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ donc en additionnant les inégalités de la question précédente on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Ou encore, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow [2\sqrt{t}]_1^{n+1} \leq S_n \leq 1 + [2\sqrt{t}]_1^n \Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 1 + 2\sqrt{n} - 2.$$

Et on obtient les inégalités souhaitées.

3. On voit facilement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{n+1} - 1)}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{n} - 1) + 1}{2\sqrt{n}} = 1.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$. D'où $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

4. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$.