EXERCICE 136

Soient x_1, x_2, x_3 et x_4 les racines de $X^4+12X-5$. On écrit les relations coefficients racines (et on ajoute le fait que la somme de deux racines, par exemple x_1 et x_2, est égale à 2) :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \quad (\sigma_1) \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0 \quad (\sigma_2) \\ x_1x_2x_3+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4=-12 \quad (\sigma_3) \\ x_1x_2x_3x_4=-5 \quad (\sigma_4) \\ x_1+x_2=2 \quad (\sigma_5) \end{cases}$$

Grâce à (σ_1) et (σ_5) on déduit $\boxed{x_3+x_4=-2}$.
À partir de (σ_2) on obtient

$$x_1(x_3+x_4)+x_2(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1x_2+x_3x_4=4}$$

Grâce à (σ_3) on obtient

$$x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-12 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1x_2-2x_3x_4=12 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1x_2-x_3x_4=6}$$

Mais alors x_1x_2 et x_3x_4 sont deux réels α et β dont on connaît la somme et la différence :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

On a donc $\boxed{x_1x_2=5}$ et $\boxed{x_3x_4=-1}$.
Mais alors pour x_1 et x_2 on connaît la somme et le produit : $x_1+x_2=2$ et $x_1x_2=5$, donc x_1 et x_2 sont les racines du polynôme X^2-2X+5.
On trouve facilement $\boxed{\{x_1,x_2\}=\{1+2i,1-2i\}}$.
De la même manière, on sait que $x_3+x_4=-2$ et $x_3x_4=-1$, donc x_3 et x_4 sont les racines de X^2+2X-1. On trouve $\boxed{\{x_3,x_4\}=\{-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2}\}}$.
On peut donc conclure que les racines cherchées sont : $1+2i$, $1-2i$, $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.

EXERCICE 140

On remarque que $X^2-2\cos(\varphi)X+1=\left(X-e^{i\varphi}\right)\left(X-e^{-i\varphi}\right)$, donc il suffit de vérifier que $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$ sont des racines de P.
Or, $P(X)=X^n\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}-X\dfrac{e^{in\varphi}-e^{-in\varphi}}{2i}+\dfrac{e^{i(n-1)\varphi}-e^{-i(n-1)\varphi}}{2i}$,
donc $P(e^{i\varphi})=\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}}{2i}-\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}}{2i}-\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}}{2i}+\dfrac{e^{-i(n-1)\varphi}}{2i}+\dfrac{e^{i(n-1)\varphi}}{2i}-\dfrac{e^{-i(n-1)\varphi}}{2i}=0$.
Puis, comme $P\in\mathbb{R}[X]$, $P(e^{-i\varphi})=\overline{P(e^{i\varphi})}=0$, donc
$\left(X-e^{i\varphi}\right)\left(X-e^{-i\varphi}\right)$ divise P, ou encore $X^2-2\cos(\varphi)X+1$ divise P.

EXERCICE 142

On raisonne par l'absurde : soit F une fraction rationnelle telle que $F^2=X$. Alors $2\deg(F)=1$ et donc $\deg(F)=\dfrac{1}{2}$. Absurde car le degré d'une fraction rationnelle appartient à $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$

EXERCICE 143

Notons $\dfrac{P}{Q}$ le représentant irréductible de F.

1. Soit a un zéro d'ordre de multiplicité $n \geq 1$ de F. On note donc $P(X) = (X-a)^n P_1(X)$, avec $P_1(a) \neq 0$ (et $Q_1(a) \neq 0$ car $\dfrac{P}{Q}$ irréductible).

   On calcule $F'(X) = \dfrac{\left(n(X-a)^{n-1}P_1(X) + (X-a)^n P_1'(X)\right)Q(X) - (X-a)^n P_1(X)Q'(X)}{Q^2(X)}$

   $= \dfrac{(X-a)^{n-1}\left(nP_1(X)Q(X) + (X-a)P_1'(X)Q(X) - (X-a)P_1(X)Q'(X)\right)}{Q^2(X)}$.

   On pose $R(X) = nP_1(X)Q(X) + (X-a)P_1'(X)Q(X) - (X-a)P_1(X)Q'(X)$ et on remarque que $R(a) = nP_1(a)Q(a) \neq 0$, donc a est une racine d'ordre $n-1$ de F'.

2. Soit a un pôle de multiplicité $n \geq 1$ de F. On note cette fois-ci $Q(X) = (X-a)^n Q_1(X)$, avec $Q_1(a) \neq 0$ (et $P(a) \neq 0$ car $\dfrac{P}{Q}$ irréductible). On a

   $F'(X) = \dfrac{P'(X)Q(X) - P(X)Q'(X)}{Q^2(X)} = \dfrac{P'(X)(X-a)^n Q_1(X) - P(X)\left(n(X-a)^{n-1}Q_1(X) + (X-a)^n Q_1'(X)\right)}{Q^2(X)}$

   $= \dfrac{(X-a)^{n-1}\left((X-a)P'(X)Q(X) - nP(X)Q_1(X) - (X-a)P(X)Q_1'(X)\right)}{(X-a)^{2n}Q_1^2(X)}$

   $= \dfrac{(X-a)P'(X)Q(X) - nP(X)Q_1(X) - (X-a)P(X)Q_1'(X)}{(X-a)^{n+1}Q_1^2(X)}$

   On pose $R(X) = (X-a)P'(X)Q(X) - nP(X)Q_1(X) - (X-a)P(X)Q_1'(X)$ et on remarque que $R(a) = -nP(a)Q_1(a) \neq 0$, donc a est un pôle d'ordre $n+1$.

EXERCICE 145

1. $\boxed{\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} = \dfrac{1/2}{X} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1/2}{X+2}}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}}$

EXERCICE 146

On a

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1/2}{X-i} - \frac{1/2}{X+i}.$$

Or (récurrence rapide, déjà vue dans le chapitre sur la dérivation) pour tout $a \in \mathbb{C}$ on a

$$\left(\frac{1}{X-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(X-a)^{n+1}}.$$

Donc on obtient

$$\left(\frac{1}{X(X^2+1)}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{X^{n+1}} - \frac{1/2}{(X-i)^{n+1}} - \frac{1/2}{(X+i)^{n+1}}\right).$$