EXERCICE 116

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
On définit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(y) = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

φ est dérivable et $\varphi'(y) = f'(x+y) - f'(y)$.
f est concave donc f' est décroissante, on en déduit que $f'(x+y) \leq f'(y)$.
Par conséquent, φ est décroissante, et comme $\varphi(0) \leq 0$, on peut conclure que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(y) \leq 0$, d'où :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

EXERCICE 117

- Soient a et $b \in \mathbb{R}$. On considère $A = \left\{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda a + (1-\lambda)b \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\right\}$.

  Pour $\lambda = 0$ on obtient $f(b) \leq f(b)$ qui est toujours vraie. Pour $\lambda = 1$: $f(a) \leq f(a)$ toujours vraie. Donc $0 \in A$ et $1 \in A$.

  Soit $(\lambda, \mu) \in A^2$. Montrons que $\dfrac{\lambda+\mu}{2} \in A$.

  On a : $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

  et : $f\big(\mu a + (1-\mu)b\big) \leq \mu f(a) + (1-\mu) f(b)$

  en additionnant et divisant par deux on obtient : $\dfrac{f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) + f\big(\mu a + (1-\mu)b\big)}{2} \leq \dfrac{\lambda+\mu}{2} f(a) + \left(1 - \dfrac{\lambda+\mu}{2}\right) f(b)$

  Mais d'après l'hypothèse de l'exercice : $f\left(\dfrac{\lambda a + (1-\lambda)b + \mu a + (1-\mu)b}{2}\right) \leq \dfrac{f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) + f\big(\mu a + (1-\mu)b\big)}{2}$ donc par transitivité : $f\left(\dfrac{\lambda+\mu}{2} a + \left(1 - \dfrac{\lambda+\mu}{2}\right) b\right) \leq \dfrac{\lambda+\mu}{2} f(a) + \left(1 - \dfrac{\lambda+\mu}{2}\right) f(b)$ ce qui prouve que $\dfrac{\lambda+\mu}{2} \in A$.

- On applique la propriété précédente à la fonction f. On sait que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité de convexité est vraie pour $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Mais alors, en faisant les moyennes, ce sera vrai aussi pour $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{3}{4}$, puis pour $\dfrac{1}{8}$, etc... Une récurrence immédiate nous permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$, l'inégalité de convexité est vraie pour $\lambda = \dfrac{k}{2^n}$.

- Soit $\lambda \in [0,1]$ quelconque. (On veut montrer l'inégalité de convexité pour ce λ).

  On construit une suite (λ_n) d'éléments de la forme $\dfrac{k}{2^n}$ qui tend vers λ.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\lambda_n = \dfrac{\lfloor \lambda \times 2^n \rfloor}{2^n}$. On montre facilement que cette suite converge vers λ.

  D'autre part, chacun des λ_n est de la forme $\dfrac{k}{2^n}$ donc il satisfait l'inégalité de convexité d'après la partie précédente.

  On a donc :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\big(\lambda_n a + (1-\lambda_n)b\big) \leq \lambda_n f(a) + (1-\lambda_n) f(b)$$

  On passe à la limite pour n qui tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente (en utilisant aussi la continuité de f) et on obtient

  $$f\big(\lambda a + (1-\lambda b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

  Cela nous permet d'affirmer que la fonction f est convexe.