EXERCICE 92

1. La fonction $x \mapsto x$ et la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sont définies sur tout $\mathbb{R}$. Par contre, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

   On en éduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ (par produit et composition).

2. On sait d'après le cours que pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y.$$
   Soit $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$ aussi. On peut remplacer $y = \dfrac{1}{x}$ dans les inégalités précédentes et on obtient :
$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$
   En multipliant les inégalités par x (qui est positif) on obtient
$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1.$$

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

4. De la même manière qu'à la question 2, on trouve
$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$
   Par contre, cette fois-ci, x est négatif, donc en multipliant par x on obtient :
$$1 - x > x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1.$$
   Cela ne change rien á la limite finale, obtenue grâce au théorème des gendarmes :
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.$$

EXERCICE 96

On a deux cas possibles :

- Soit $f(0) = 0$ et alors on a trouvé une solution a notre problème.
- Soit $f(0) \neq 0$. Dans ce cas, on peut considérer la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

  g est continue sur $]0, +\infty[$ (par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule jamais)

  et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (car $f(0) > 0$ et $x \to 0^+$).

  Mais alors, par définition de limite, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]0, \delta], \quad g(x) \geq 10 > 1$. En particulier, on a $\boxed{g(\delta) = y_1 \geq 10 > 1.}$

  D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell < 1$.

  En appliquant la définition de limite avec $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$ on a : $\exists M > 0$ tel que $\forall x \geq M$, $\left|g(x) - \ell\right| \leq \varepsilon$ (ou encore : $\ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$)

  Mais alors on a : $\boxed{g(M) = y_2 \leq \ell + \dfrac{1-\ell}{2} < 1.}$

  On a donc trouvé deux points δ et M dans $]0, +\infty[$ tels que $g(\delta) = y_1 > 1$ et $g(M) = y_2 < 1$.

  On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermediaires (g est continue sur $]0, +\infty[$) pour en déduire qu'il existe $c \in [\delta, M]$ tel que $g(c) = 1$, c'est-à-dire $f(c) = c$, ce qui nous permet de conclure.