EXERCICE 80

On remarque que $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$
et que pour tout $k\in[\![n+1,2n]\!]$, $\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{2n}$. La somme ayant n termes on en déduit que

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant n\cdot\frac{1}{2n}$$

Mais alors on a : $H_1=1$, $H_2-H_1\geqslant\frac{1}{2}$, $H_4-H_2\geqslant\frac{1}{2}$, …, $H_{2^k}-H_{2^{k-1}}\geqslant\frac{1}{2}$ (récurrence immédiate).

Donc en additionnant on obtient : $H_{2^k}-H_1\geqslant\frac{k}{2}$, puis $\boxed{H_{2^k}\geqslant\frac{k}{2}+1}$

Maintenant, on remarque que (H_n) est une suite croissante (à chaque fois on ajoute un terme positif) et non majorée (en effet, grâce à la propriété montrée précedemment, $\forall A>0$, $\exists k\in\mathbb{N}$ tel que $1+\frac{k}{2}\geqslant A$ et donc $H_{2^k}\geqslant A$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=+\infty$.
(on peut aussi montrer que (H_n) est croissante puis raisonner par l'absurde : si (H_n) convergeait vers ℓ, on obtiendrait $\ell-\ell\geqslant\frac{1}{2}$ absurde, donc (H_n) ne peut pas converger, donc elle diverge vers $+\infty$).

EXERCICE 81

1. $v_n-v_{n-1}=\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n}{n}-\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}}{n-1}=\dfrac{(n-1)(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n)-n(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})}{n(n-1)}$
$=\dfrac{-u_1-u_2-\cdots-u_{n-1}+(n-1)u_n}{n(n-1)}$.

   Or comme (u_n) est croissante, on a $u_n\geqslant u_k\ \forall k\in[\![1,n-1]\!]$ donc $\dfrac{-u_1-u_2-\cdots-u_{n-1}+(n-1)u_n}{n(n-1)}\geqslant 0$ ce qui nous permet de conclure que (v_n) est croissante.

2. $$v_{2n}=\frac{u_1+\cdots+u_{2n}}{2n}=\frac{1}{2}\Big(\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}+\frac{u_{n+1}+\cdots+u_{2n}}{n}\Big).$$

   Or $\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}=v_n$ et $\dfrac{u_{n+1}+\cdots+u_{2n}}{n}\geqslant\dfrac{nu_n}{n}=u_n$ (car $u_k\geqslant u_n\ \forall k\in[\![n+1,2n]\!]$).

   Par conséquent : $u_{2n}\geqslant\dfrac{u_n+v_n}{2}$.

3. (v_n) est une suite croissante et (v_n) est majorée par ℓ (car $u_k\leqslant\ell\,\forall k\in\mathbb{N}$). Donc (v_n) est une suite convergente.

   Soit $\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell'\in\mathbb{R}$.

   On passe à la limite dans l'inégalité trouvée à la question précedente et on obtient

   $$\lim_{n\to+\infty}v_{2n}\geqslant\lim_{\to+\infty}\frac{u_n+v_n}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\ell'\geqslant\frac{\ell+\ell'}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\ell'\geqslant\ell.$$

   Mais on sait que $\ell'\leqslant\ell$ (car (v_n) est majorée par ℓ) donc $\ell'=\ell$.

EXERCICE 85

On note : (1) $u_{n+1} = 4 - 3u_n$
On pose : (2) $\alpha = 4 - 3\alpha$
Et on obtient $\alpha = 1$.
En calculant (1) − (2) on obtient

$$(u_{n+1} - 1) = -3(u_n - 1)$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - 1$ et on obtient donc

$$v_{n+1} = -3v_n$$

(v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 3$ et définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot (-3)^n$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 + 3 \cdot (-3)^n = 1 + (-1)^n 3^{n+1}$.
La suite (u_n) est divergente (suite géométrique de raison $\leqslant 1$).

EXERCICE 86

1. On écrit l'équation caractéristique :
$$x^2 + x + 1 = 0 \quad (E_C).$$
Le discriminant est négatif (-3) donc on a deux solutions complexes conjuguées :
$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$
On en déduit que la suite (u_n) est de la forme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \cos\left(n\frac{2}{3}\pi\right) + \mu \sin\left(n\frac{2}{3}\pi\right).$$
Comme on veut $u_0 = 2$ alors on en déduit que $\lambda = 2$.
Comme on veut $u_1 = 1$ on obtient :
$$\lambda \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mu \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \mu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$
On peut en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = 2\cos\left(n\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{2}{3}\pi\right).}$$

2. Le discriminant de l'équation caractéristique est nul, et l'unique solution est $r = 4$.
On en déduit que la suite (u_n) est de la forme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda 4^n + \mu n 4^n.$$
Comme $u_0 = 0$, on obtient $\lambda = 0$.
Comme $u_1 = 1$, on obtient $4\mu = 1$ et donc $\mu = \frac{1}{4}$.
On peut conclure que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = n \cdot 4^{n-1}.}$$

3. L'équation caractéristique est : $2x^2 - 3x + 1 = 0$.
Le discriminant est positif (1) et les deux solutions sont 1 et $\frac{1}{2}$.
On en déduit que la suite (u_n) est de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda + \mu\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Les conditions initiales ($u_0 = 1$ et $u_1 = -1$) nous permettent d'obtenir le système :
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \frac{1}{2}\mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 4 \end{cases}.$$
On peut donc conclure que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = -3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

EXERCICE 89

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x - ax^2$. f est dérivable (car polynomiale) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 - 2ax$$

On en déduit rapidement que f est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{a}[$ et décroissante ensuite. On étudie le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ et on remarque que g s'annule en 0 et $\frac{1}{a}$, est négative sur $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{a}, +\infty[$ et positive sur $]0, \frac{1}{a}[$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{a}$	↘	$-\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Si $\boxed{u_0 \in]-\infty, 0[}$: l'intervalle $]-\infty, 0[$ est stable par f et la fonction f y est croissante, donc (u_n) est monotone. De plus g est négative sur cet intervalle donc (u_n) est décroissante.

  Si (u_n) convergeait alors elle convergerait vers 0 ou $\frac{1}{a}$ (les deux points fixes). Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]-\infty, 0[$, si (u_n) convergeait alors elle convergerait vers 0. Mais cela est impossible car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0 < 0$, donc par passage à la limite $\ell \leqslant u_0 < 0$. Absurde. On en déduit que (u_n) diverge vers $-\infty$. $\boxed{u_n \to -\infty}$

- Si $\boxed{u_0 = 0}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$, on a donc une suite constante et $\boxed{u_n \to 0}$

- Si $\boxed{u_0 \in \left]0, \frac{1}{a}\right[}$ (intervalle stable) : f est croissante sur cet intervalle donc (u_n) monotone. De plus, g est positive sur cet intervalle donc (u_n) croissante. (u_n) est croissante et majorée (par $\frac{1}{a}$) donc (u_n) converge vers une limite $\ell \in \{0, \frac{1}{a}\}$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_0 \leqslant u_n$ donc par passage à la limite : $0 < u_0 \leqslant \ell$. on en déduit que $\ell = \frac{1}{a}$. Donc $\boxed{u_n \to \frac{1}{a}}$

- Si $\boxed{u_0 = \frac{1}{a}}$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{a}$, suite constante donc $\boxed{u_n \to \frac{1}{a}}$

- Si $\boxed{u_0 \in \left]\frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right[}$, alors $u_1 \in]0, \frac{1}{a}[$ (cas déjà traité) donc $\boxed{u_n \to \frac{1}{a}}$

- Si $\boxed{u_0 = \frac{2}{a}}$ alors $u_1 = 0$ (suite stationnaire) donc $\boxed{u_n \to 0}$

- Si $\boxed{u_0 > \frac{2}{a}}$ alors $u_1 < 0$ (cas déjà traité) alors $\boxed{u_n \to -\infty}$

EXERCICE 90

Soit $n \geqslant 2$

On étudie la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$: f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (car fonction polynomiale).

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + 2x + 1 > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme f_n est continue et strictement monotone, on en déduit (théorème de la bijection monotone) qu'elle induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $f(\mathbb{R}^+) = [-1, +\infty]$.

En particulier 0 admet un unique antécédent par f_n. Donc il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

On a : $f_n(0) = -1$ et $f_n\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1$.

On remarque que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 = \frac{9}{16} + \frac{12}{16} - \frac{16}{16} > 0$, donc $f_n\left(\frac{3}{4}\right) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermediaires f_n s'annule dans l'intervalle $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ (de plus on sait déjà qu'il existe une unique racine réelle positive u_n pour f_n), donc $u_n \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

2. $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n^n + u_n^2 + u_n - 1 = u_n^{n+1} + \left(u_n^n + u_n^{n-1} + u_n^2 + u_n - 1\right) - u_n^{n-1} = u_n^{n+1} + f_n(u_n) - u_n^{n-1} = u_n^{n+1} - u_n^{n-1}$.

Or $u_n \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$ donc $u_n^{n+1} < u_n^{n-1}$. On en déduit que $f_{n+1}(u_n) < 0$. D'autre part on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est strictement croissante. On en déduit que $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée (par $\frac{3}{4}$), donc elle converge (thèorème de la limite monotone) vers un réel $\ell \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

3. On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $f_n(u_n) = 0$, c'est-à-dire $u_n^n + u_n^{n-1} + u_n^2 + u_n - 1 = 0$.

On va passer à la limite dans cette égalité.

On remarque que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \exp(n \ln(u_n)) = 0$ (car $\ln(u_n) < 0$).

De même $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{n-1} = 0$.

Donc en passant à la limite dans l'égalité on obtient $\ell^2 + \ell - 1 = 0$.

En résolvant cette équation on obtient deux solutions : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Or, on sait que $\ell \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$, donc on exclut la première solution (qui est strictement négative).

On conclut que $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.