EXERCICE 78

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}S_i &= \sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}\sum_{k=1}^{n}k^i && \textit{on entre la constante dans la somme}\\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=1}^{n}\binom{p+1}{i}k^i && \textit{on intervertit les sommes}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}k^i && \textit{on ajoute et soustrait le dernier terme}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p+1}\binom{p+1}{i}k^i - \binom{p+1}{p+1}k^{p+1}\right) && \textit{binôme de Newton}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p} - \sum_{k=1}^{n}k^{p+1} && \textit{cangement d'indice } k'=k+1 \textit{ dans la première somme}\\
&= \sum_{k=2}^{n+1}k^{p+1} - \sum_{k=1}^{n}k^{p+1} && \textit{télescopage}\\
&= \boxed{(n+1)^{p+1}-1}
\end{aligned}
$$