EXERCICE 61

D'après la règle de Chasles on peut écrire : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

On a deux cas possibles :

- Soit $\displaystyle\frac{1}{c-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Dans ce cas on obtient :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{b-c}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$
  Mais alors :
  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{b-a}\left(1+\frac{b-c}{c-a}\right)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$
  et donc :
  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Soit $\displaystyle\frac{1}{c-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Ce deuxième cas est analogue est on obtiendra :
  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut donc conclure que l'inégalité de l'énoncé est toujours vérifiée.