EXERCICE 54

La fonction arctan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus elle est à valeurs dans $]1,+\infty[$. On en déduit que $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Enfin, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et composition de fonctions qui le sont. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\boxed{f'(x)} &= 2 \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times (2x-1)\right) + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{1+1+x^2+x^2-2x\sqrt{1+x^2}} \times \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}} \times \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}-x(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)-x\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} - \frac{1}{1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} + 1\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x} + 1\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x} + 1\right) = \boxed{0}
\end{aligned}$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 56

1. $\ln(1+x) \leqslant x$: montré en classe.

   Montrons que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$.

   On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

   $$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2.$$

   On veut montrer que f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

   f est dérivable par somme et composition de fonctions dérivables.

   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   $$f'(x) = \frac{1}{1+x} + x - 1 = \frac{1+x^2-1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

   On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) > 0$ et on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $f(0) = 0$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geqslant 0$.

   On peut donc conclure que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$.

2. On remarque que

   $$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)\right)$$

   (tous les facteurs du produit sont strictement positifs, donc le ln est bien défini).

   On s'intéresse donc à $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)$.

On a (d'après les propriétés de ln) : $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors $\frac{k}{n^2} \geqslant 0$ et donc, grâce à la question 1, on sait que $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$.

En passant aux sommes on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

En développant les sommes de gauche et de droite :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

On remarque que $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = 0$,

donc d'après le théorème des gendarmes on peut conclure que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ puis, en composant avec l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = e^{1/2} = \boxed{\sqrt{e}}$$

EXERCICE 57

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-6\}$ par produit et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule jamais.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2}{x+6}\cdot e^x + \frac{2x(x+6)-x^2}{(x+6)^2}\cdot e^x \\ &= e^x\left(\frac{x^2(x+6)+x^2+12x}{(x+6)^2}\right) \\ &= \frac{e^x\cdot x(x^2+7x+12)}{(x+6)^2} \end{aligned}$$

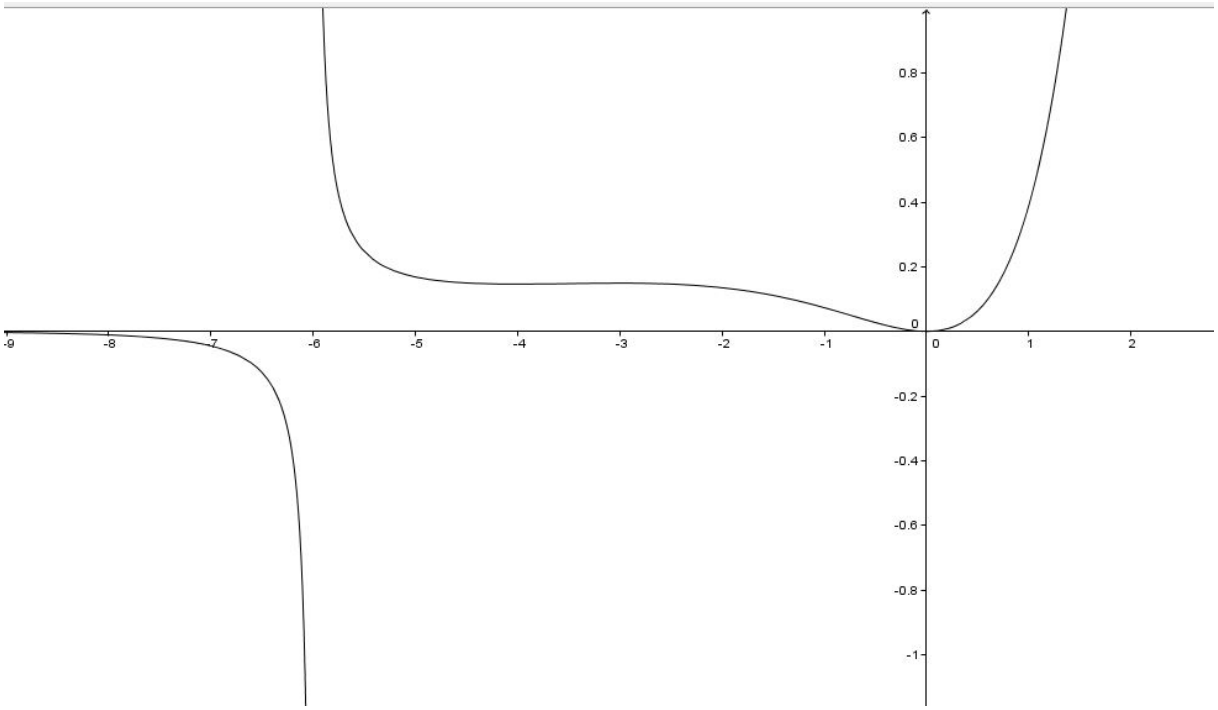
On étudie donc le signe de $x^2+7x+12$. Son discriminant est $\Delta = 49-48 = 1$, et ses racines sont $x_1 = \dfrac{-7+1}{2} -3$ et $x_2 = \dfrac{-7-1}{2} = -4$.
On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-6		-4		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$8e^{-4}$	↗	$3e^{-3}$	↘	0	↗	$+\infty$

avec les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.
- $\lim\limits_{x\to-6^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-6^+} f(x) = -+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, on trace la courbe représentative de f (remarquer une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$, une asymptote verticale (à droite/gauche) d'équation $x = -6$ et une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées à $+\infty$).



EXERCICE 58

On va démontrer la formule par récurrence à deux crans.

- **Initialisation :**
  - $(n=0)$: $f_0 : x \mapsto e^{1/x}$, f_0 est dérivable par composition de fonctions dérivables (sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$) et $f_0'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x} = \dfrac{(-1)^{0+1}}{x^{0+2}}e^{1/x}$.
  - $(n=1)$: $f_1 : x \mapsto xe^{1/x}$ est dérivable (deux fois) sur $\mathbb{R}_+^*$ (par composition) et $f_1''(x) = \left(e^{1/x} - x\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x} + \dfrac{1}{x^3}e^{1/x} + \dfrac{1}{x^2}e^{1/x} = \dfrac{1}{x^3}e^{1/x} = \dfrac{(-1)^{1+1}}{x^{1+2}}e^{1/x}$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la formule soit vraie pour n et pour $(n-1)$.
  On veut calculer $f_{n+1}^{(n+2)}$ (avec $f_{n+1}(x) = x^{n+1}e^{1/x} = xf_n(x)$).

$$f_{n+1}^{(n+2)}(x) = \left((xf_n(x))'\right)^{(n+1)} = \left(f_n(x) + xf_n'(x)\right)^{(n+1)} = f_n^{(n+1)}(x) + \left(x\left(nx^{n-1}e^{1/x} + x^n\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}\right)\right)^{(n+1)}$$

$$= f_n^{(n+1)}(x) + \left(nx^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} - \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1)} = f_n^{(n+1)}(x) + nf_n^{(n+1)}(x) - \left(f_{n-1}^{(n)}(x)\right)' \text{ (on reconnaît } f_{n-1}(x) \text{ et } f_n(x))$$

$$= (n+1)f_n^{(n+1)}(x) - \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}\right)' \text{ par hypothèse de récurrence sur } f_{n-1}^{(n)}(x).$$

$$= (n+1)f_n^{(n+1)}(x) + (-1)^{n-1}\frac{(-n-1)}{x^{n+2}}e^{1/x} - \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} \text{ (on a dérivé la partie entre parenthèses)}$$

$$= (n+1)f_n^{(n+1)}(x) - (n+1)f_n^{(n+1)}(x) + \frac{(-1)^{n+2}}{x^{n+3}}e^{1/x} \text{ par hypothèse de récurrence sur } f_n^{(n+1)}(x).$$

$$= \frac{(-1)^{n+2}}{x^{n+3}}e^{1/x} \text{ ce qui prouve la formule pour } f_{n+1}^{(n+2)}.$$