EXERCICE 6

On fait une démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

- **Initialisation :** pour $n = 2$, $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$ et $\frac{3 \times 2}{2 \times 2 + 1} = \frac{6}{5}$. On a bien $\frac{5}{4} > \frac{6}{5}$ donc l'initialisation est prouvée.

- **Hérédite :** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $\boxed{1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1} \quad (HR)}$

  (on veut montrer que : $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$*)*

  Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

  Il suffit donc de montrer que $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n+3}{2n+3}$.

  On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned}
\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n+3}{2n+3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3n(n+1)^2 + 2n+1}{(2n+1)(n+1)^2} > \frac{3n+3}{2n+3} \\
&\Leftrightarrow \quad \big(3n(n+1)^2 + 2n+1)(2n+3)\big) > (3n+3)(2n+1)(n+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \big(3n(n^2+2n+1) + 2n+1)(2n+3)\big) > (6n^2+9n+3)(n^2+2n+1) \\
&\Leftrightarrow \quad (3n^3+6n^2+5n+1)(2n+3) > 6n^4+12n^3+6n^2+9n^3+18n^2+9n+3n^2+6n+3 \\
&\Leftrightarrow \quad 6n^4+21n^3+28n^2+17n+3 > 6n^4+21n^3+27n^2+15n+3 \\
&\Leftrightarrow \quad n^2+2n > 0
\end{aligned}$$

  or, la dernière égalité est toujours vraie pour $n \geqslant 2$, donc on peut conclure que

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n+3}{2n+3}$$

  mais alors, par transitivité, on a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n+3}{2n+3}$$

  et l'hérédité est prouvée.

- **Conclusion :** la propriété étant initialisée et héréditaire, on peut conclure, d'après le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.