EXERCICE 168

1. La fonction nulle appartient à F (on pose $P = Q = 0$ le polynôme nul), donc $F \neq \emptyset$.

   Soient $F_1 : x \mapsto P_1(x)\sin x + Q_1(x)\cos x$ et $F_2 : x \mapsto P_2(x)\sin x + Q_2(x)\cos x$ deux éléments de F. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $F_1 + \lambda F_2$: $x \mapsto (P_1(x) + \lambda P_2(x))\sin x + (Q_1(x) + \lambda Q_2(x))\cos x$ (avec degré de $P_1 + \lambda P_2$ et degré de $Q_1 + \lambda Q_2 \leq n$ par somme de polynômes de degré $\leq n$) donc $(F_1 + \lambda F_2) \in F$. Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de E.

2. $\mathscr{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto x\cos x, \ldots, x \mapsto x^n \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto x \sin x, \ldots, x \mapsto x^n \sin x)$ est clairement une famille génératrice de F ayant $2(n+1)$ éléments. Il reste à montrer que $\mathscr{B}$ est libre.

   Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \cos x + \lambda_1 x \cos x + \cdots + \lambda_n x^n \cos x + \mu_0 \sin x + \ldots \mu_n x^n \sin x = 0$$

   Cela est vrai en particulier pour $x_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, mais alors on obtient $\lambda_0 + \lambda_1 x_k + \ldots \lambda_n x_k^n = 0$ or un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul, donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   De même si on évalue l'égalité sur $y_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ on obtient

   $$\mu_0 + \mu_1 y_k + \cdots + \mu_n y_k^n = 0$$

   un autre polynôme avec une infinité de racines qui est donc le polynôme nul, donc $\mu_0 = \cdots = \mu_n = 0$ et donc la famille $\mathscr{B}$ est libre, mais alors c'est une base et donc $\dim F = 2n + 2$.

EXERCICE 169

On remarque que le polynôme nul est un multiple de A, donc $0 \in F$, d'où $\boxed{F \neq \emptyset}$
D'autre part, si B et C sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ divisibles par A et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A \mid \lambda B + C$ (et $\lambda B + C \in \mathbb{K}_n[X]$), donc F est stable par combinaison linéaire.
On peut conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
Soit $d = \deg(A)$ Soit P un polynôme de F. Alors il existe $B \in \mathbb{K}_{n-d}[X]$ tel que $P = AB$. Or, on peut écrire $B = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-d} X^{n-d}$, donc on a

$$P(X) = b_0 A + b_1 AX + \ldots b_{n-d} AX^{n-d}$$

on en déduit que $\mathscr{B} = \left(A, AX, AX^2, \ldots, AX^{n-d}\right)$ est une famille génératrice de F. D'autre part, il s'agit d'une famille échelonnée de polynômes (ils ont degrés différents deux à deux) donc elle est libre.
On conclut que $\mathscr{B}$ est une base de F et que $\dim(F) = n - d + 1$.