# Table des matières

# 1 Suites numériques

$\boxed{1}$ Etudier la nature de chacune des suites réelles $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ définies ci-dessous :

$$u_n = \frac{-n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}; \quad u_n =^n \sqrt{n}; \quad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$\boxed{2}$ Etudier la nature de chacune des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définies ci-dessous :

$$u_n = \frac{n}{\ln(n)}; \quad u_n = \text{n}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad u_n = \ln(n+1)-\ln(n); \quad u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n; \quad u_n = \frac{e^{n\frac{\pi}{2}}}{e^{n\text{arctan(n)}}}.$$

$\boxed{3}$

1. Montrer que pour tout $\text{x} \geqslant 0$ et pour tout entier $\text{n} \geqslant 0$, $(1+\text{x})^n \geqslant 1+\text{nx}$.
2. On considère la suite $(a^n)_{n\geqslant 0}$, montrer que :
   - Si $a>1$ alors cette suite diverge vers $+\infty$.
   - Si $a=1$ alors cette suite est constante.
   - Si $|a|<1$ alors elle converge vers 0.
   - Si $a\leqslant -1$ alors cette suite n'a pas de limite.

$\boxed{4}$ Déterminer les limites des suites $(u_n)$ suivantes :

$$u_n = \frac{3n-2}{2n+5}; \quad u_n = \frac{5n^3+2n^2-1}{6n^3-1}; \quad u_n = \frac{(n+1)^3-n^3}{n^2}; \quad u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right); \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right); \quad u_n = \arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right);$$

$$u_n = \frac{n}{n!}; \quad u_n = \frac{n^3+2n^2+\sqrt{n}}{3^n}; \quad u_n = \frac{(-1)^n+2n}{n}; \quad u_n = \frac{\cos^3(n)}{n};$$

$$u_n = \frac{n+\sin(n)}{\sqrt{3n^2+1}}; \quad u_n = \frac{(2n+(-1)^n)^2}{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}; \quad u_n = \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n+1}}.$$

$\boxed{5}$ Calculer les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans les cas suivants :

$$u_n = \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}; \quad u_n = \sqrt[n]{n^2}; \quad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

.

$\boxed{6}$ Démontrer que les suites définies ci-dessous sont monotones, en précisant le domaine de validité pour n :

$$u_n = \sqrt{(n+3)}; \quad u_n = 2^n-n; \quad u_n = \frac{2^n}{n!}; \quad u_n = \frac{n^2}{n-2}$$

.

$\boxed{7}$ Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, et déterminer la limite lorsqu'elle existe :

$$u_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}; \quad u_n = n\cos(n)+2n; \quad u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}; \quad u_n = \sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right);$$

$\boxed{8}$ Trouver la limite des suites :

$$u_n = \frac{2^n+1+3^n+1}{2^n+3^n}; \quad u_n = \frac{\cos(n)}{n};$$
$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}; \quad u_n = \frac{n\sin(n!-1515)}{1+n^2}.$$

$\boxed{9}$ Etudier la nature des suites complexes suivantes :

$$u_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}; \quad u_n = \frac{n^2 i^n}{n^3+1}; \quad u_n = \mathrm{th}(n) + i\arctan(n); \quad u_n = \frac{1}{1+2^n e^{2in}}.$$

$\boxed{10}$ On considère la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+2}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et appartient à $[0,1]$.
2. Etudier le sens de variation et la nature de cette suite.
3. On note $\ell$ et $\ell'$ les solutions de l'équation $f(x) = x$ lorsque $f(x) = \frac{3x+1}{2x+2}$. Montrer que la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = \frac{u_n-\ell}{u_n-\ell'}$ est géométrique. En déduire les expressions de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$ et retrouver les résultats précédents.

$\boxed{11}$ On considère la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1.$$

1. Montrer qu'il existe une suite constante de valeur $K$ vérifiant cette relation.
2. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ [Indication : étudier la suite $(u_n - K)_{n\geqslant 0}$].
3. Etudier brièvement la suite $u$.

$\boxed{12}$ On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$,et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Cette suite est-elle bornée et est-elle convergente ?

$\boxed{13}$ Pour chacune des suites définies par récurrence $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ ci-dessous satisfaisant $u_{n+1} = f(u_n)$, déterminer si la suite $u$ est bornée, monotone, convergente et trouver sa limite en cas de convergence.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{x} \text{ et } u_0 = 1, \\ f(x) &= 1 + \frac{x}{2} \text{ et } u_0 = 1, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{1+x}{2}} \text{ et } u_0 = 1/2, \end{aligned}$$

$\boxed{14}$ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$. Pour quelles valeurs de $u_0$ la suite $u$ est-elle définie ? Montrer qu'elle converge alors vers 1 sauf si $u_0$ est égal à une valeur particulière à déterminer.

$\boxed{15}$

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite récurrente donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $u_0$ la suite $u$ est-elle bien définie ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $u_0$ la suite $u$ est-elle convergente ?

$\boxed{16}$

1. Montrer que
   - $(\ln(n))^{10^9}$ est négligeable devant $\sqrt{n}$.
   - $n^{10^9}$ est négligeable devant $(1,00001)^n$.
   - $(10^9)^n$ est négligeable devant $n!$ Lorsque $n$ tend vers $+\infty$
2. Montrer que
   - $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est négligeable devant $\frac{1}{(\ln(n))^{10^9}}$.
   - $(0,99999)^n$ est négligeable devant $\frac{1}{n^{10^9}}$.
   - $\frac{1}{n!}$ est négligeable devant $(0,9999)^n$.
3. Montrer que $\sqrt{n}-\sqrt{2n+1} \sim (1-\sqrt{2})\sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Montrer que $\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\left(\sqrt{n}-1\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque $n \to +\infty$.
5. Montrer que $\ln(3n^2-5\sqrt{7n+3}+n^{\frac{2}{3}}) \sim 2\ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.
6. Montrer que $\ln\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{4\sqrt{n^2+5n-7}}\right) \sim -\ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

$\boxed{17}$ Montrer que $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1 \sim \frac{1}{2n^2}$ lorsque $n \to +\infty$.

$\boxed{18}$

1. Montrer, presque sans calcul, que $3n^3-5n^2+12n-1>0$ lorsque n est assez grand.
2. Montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{2n}$ n'est pas monotone à partir d'un certain rang.

$\boxed{19}$ Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$.

1. Montrer que $u$ est bien défini.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant n$
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n-1}$.
4. En déduire que $u_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\sqrt{n+\sqrt{n-1}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n+\sqrt{2n-3}}$.
6. En déduire que $u_n \sim \sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
7. Montrer que $(u_n-\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

$\boxed{20}$ Soit $S=(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall k \geqslant 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
2. En déduire que $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leqslant S_n \leqslant 2\left(\sqrt{n}\right)+1$.
3. En déduire que $S_n \sim 2\sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
4. En déduire la limite de la suite S.
5. Refaire le travail pour les suites $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ où $0<\alpha<1$.

$\boxed{21}$ Soit $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 1, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K}$.

1. Montrer que $H_u \sim \ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.
2. En déduire la limite de la suite H.

3. En déduire également l'existence d'une suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $\forall n \geqslant 1, H_n = \ln(n) + \varepsilon_n \ln(n)$, et $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 1, u_n = H_n - \ln(n)$.
4. Montrer que $u$ est décroissante.
5. En déduire que $u$ converge vers un réel noté $\gamma$ appartenant à $[0,1]$.
6. En déduire l'existence d'une suite $\varepsilon' = (\varepsilon'_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon'_n$ où $\varepsilon'_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
7. En déduire que $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ converge vers $\ln(2)$ lorsque $n \to +\infty$.

# 2 Séries numériques

$\boxed{22}$ Etudier la nature des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = 1 - \frac{n}{n+1};\quad u_n = \frac{n}{n^2+2};\quad u_n = \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n;\quad u_n = \arcsin\left(1 - \frac{n^3+1}{n^3+2}\right);\quad u_n = \frac{n^3}{n!};$$
$$u_n = \frac{2n-1}{2^{2n-1}};\quad u_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n};\quad u_n = \frac{e^{\arctan(n)}}{n^2+1}.$$

$\boxed{23}$ Etudier la nature des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n - 1}{n(\ln n)^2};\quad u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right);\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}};\quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}\sin(\sqrt{n})}{n^{3/2}};\quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2};$$
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}\ln n};\quad u_n = \frac{1 + (-1)^n\sqrt{n}}{1+n}.$$

$\boxed{24}$ Etudier la nature et la somme (si elle existe) des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = (-1)^n;\quad u_n = a^n;\quad u_n = \frac{1}{n(n+1)};\quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};\quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}};\quad u_n = \frac{1}{n^2-1};\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

où $a$ est un nombre réel.

$\boxed{25}$ Etudier la nature des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)};\quad u_n = \frac{n!}{n^n};\quad u_n = \tan\left(\frac{1}{2^n}\right);\quad u_n = \frac{1}{\ln(n)};\quad u_n = \frac{1}{n + \ln(n)};\quad u_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n};$$
$$u_n = \frac{1}{2^n - 1}\quad u_n = \frac{n - 2\ln(n)}{n^3};\quad u_n = \frac{1}{n^3 + \text{ncos(n)}};\quad u_n = \frac{1}{n2^n}.$$

$\boxed{26}$ Etudier la convergence et la convergence absolue des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^2};\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \text{ avec } a \in \mathbb{R};\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)};\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n)};\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n};\quad u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}.$$

$\boxed{27}$ Etudier la nature des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{\sin^2(n)}{3^n};\quad u_n = \frac{2 + \cos(n)}{n^{1/5}};\quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^{2/3}}\right);$$
$$u_n = \frac{2^n}{3^n + 1};\quad u_n = \frac{(n!)}{(2n)!};\quad u_n = \left(\frac{n+2}{3n}\right)^n;\quad u_n = \frac{\sin n}{n}.$$

$\boxed{28}$ Etudier la nature des séries $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}};\quad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right);\quad u_n = \frac{\cos(2n)}{n}.$$

$\boxed{29}$

1. Soit la série de terme général $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
   a) Montrer que $(n+2)(n+3)u_{n+1} = 1+(n+2)u_n$.
   b) En déduire que $u_n \leqslant 1/(n*(n+1))$.
   c) Conclure sur la nature de la série considérée.
2. Soit la série de terme général $u_n = \ln(1+e^{-n})$. Soit $v_n$ tel que $u_n ln(n!) = v_n + ln(n)$.
   a) Calculer $v_n$. Montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ puis que la suite $(v_n)_{N\geqslant 0}$ est décroissante et convergente (sa limite, appelée gamma, est la constante d'Euler).
   b) Montrer que $ln(n!) \leqslant n * ln(n)$.
   c) Conclure sur la nature de la série considérée.
3. Trouver la nature de $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\gamma}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$.
4. Etudier la nature de la série numérique $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels.

$\boxed{30}$

1. Montrer que $\sum \frac{n^2}{n!}$ converge et trouver sa somme.[Indication : utiliser l'identité $n^2 = n(n-1)+n$).]
2. Montrer que $\sum \frac{n^3}{n!}$ converge et trouver sa somme.
3. Montrer que $\sum \ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$ converge et trouver sa somme.

$\boxed{31}$ Trouver la nature de $\sum \frac{1!+2!+...+n!}{(n+2)!}$ et de $\sum \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$.

# 3 Intégrale définie

$\boxed{32}$ Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\int_3^4 \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}\,\mathrm{d}x;\quad \int_1^2 \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1};\quad \int_0^1 \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x;\quad \int_2^3 \frac{x^5}{x^3-1}\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{33}$ Calculer les intégrales définies suivantes en effectuant une intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^1 x\arcsin(x)\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x;\quad \int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\pi/2} x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{34}$ Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{5-4\sin(x)};\quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x;\quad \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4(x)}.$$

$\boxed{35}$ Calculer les primitives suivantes :

$$\int \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x;\quad \int \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x;\quad \int \frac{t^{2/3}+1}{t^{1/3}}\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{36}$

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+2}.$$
Après avoir justifié le fait que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, déterminer la primitive de $f$ s'annulant en 2.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$
Après avoir justifié le fait que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, déterminer la primitive de $g$ s'annulant en -1.
3. Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_{-1}^1 |x|\,\mathrm{d}x;\quad \int_{-2}^2 |t^2-1|\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{37}$ Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x;\quad \int_1^{e^2} \frac{(\ln(x))^3}{x}\,\mathrm{d}x;\quad \int \frac{e^y}{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y;\quad \int_0^{\pi/6} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t;\quad \int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x;\quad \int \frac{1}{(1+u)^5}\,\mathrm{d}u.$$

$\boxed{38}$ En utilisant une intégration par parties, calculer les primitives et intégrales suivantes :

$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x;\quad \int (t^2+1)\sin(t)\,\mathrm{d}t;\quad \int \frac{\theta}{\cos^2(\theta)}\,d\theta;\quad \int_0^1 t\arctan(t)\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x;\quad \int x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

pour tout entier relatif $n$.

$\boxed{39}$ En utilisant un changement de variables, calculer les primitives et intégrales suivantes :

$$\int \frac{x}{(4+x^2)^3}\,\mathrm{d}x;\quad \int \sin^5(t)\,\mathrm{d}t;\quad \int \cos^3(y)\sin^2(y)\,\mathrm{d}y;\quad \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x;\quad \int_1^e \frac{1}{t(\ln(t)+1)}\,\mathrm{d}t;\quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}(u+2)}\,\mathrm{d}u;$$
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x;\quad \int_{-\pi/6}^0 \frac{1+\tan^2(t)}{1-\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{40}$

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ par
$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$
Trouver les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, si $x\notin\{1,2,3\}$ alors
$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}.$$
2. En déduire les primitives de$f$.

$\boxed{41}$ Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{10}};\quad \int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x;\quad \int_a^b \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x;\quad \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3};$$
$$\int_0^1 \sqrt{|1-x|}\,\mathrm{d}x;\quad \int_{-1}^1 e^{-3x+2}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^2 \frac{x^2}{2+x^3}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x;\quad \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x;\quad \int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x;$$
$$\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1};\quad \int_2^4 \ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x;\quad \int_{-1}^1 e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\frac{\pi}{20}} \tan(5x)\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{42}$ Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\int_{\frac{-3}{2}}^{-1} \sqrt{2t+3}\,\mathrm{d}t;\quad \int_{\frac{-5}{2}}^{-2} \sqrt{4t^2+24t+35}\,\mathrm{d}t;\quad \int_{-3}^{\frac{-5}{2}} \sqrt{-4t^2-24t-35}\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^1 (t^2-3t+1)e^{2t}\,\mathrm{d}t;$$
$$\int_0^1 (t^2-t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\cos(4t)\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t;\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}\,\mathrm{d}t;\quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t-t^3}{1-3t^2}\,\mathrm{d}t;$$
$$\int_{-1}^0 \frac{2t}{t^3-1}\,\mathrm{d}t;\quad \int_{-1}^0 \frac{t}{t^4-3t^3+3t^2-3t+2}\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(t)\cos^4(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{43}$ Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t;\quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^{\pi} \frac{1}{2-\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t;\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{44}$ Soit $I=(I_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\forall n\geqslant 0, I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n\geqslant 0, I_n=\frac{\ln(2)}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$. [<u>Indication</u> : intégration par parties.]
2. En déduire que $I_n\sim\frac{\ln(2)}{n}$ lorsque $n\to+\infty$.

$\boxed{45}$ Montrer que $\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ pour tous entiers naturels $p$ et $q$.

# 4 Séries entières

$\boxed{46}$ Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{x^n}{n!};\quad \sum n^n x^n;\quad \sum \frac{n^2 x^n}{3^n+n};\quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n;\quad \sum ne^{-n}x^{2n};\quad \sum ne^{-n}x^{2n+3}.$$

$\boxed{47}$ En s'aidant de développements en série entière de fonctions classiques (dont on connaît le rayon de convergence), déterminer dans chacun des cas ci-dessous, le développement de la série entière de la fonction $f$ en précisant son rayon de convergence. Donner en fonction de l'entier $n$ la valeur de $f^{(n)}(0)$.

$$f(x) = \frac{1}{3-2x};\quad f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)};\quad f(x) = \ln(2x+3);\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad f(x) = \arcsin x;\quad f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^3}.$$

$\boxed{48}$

1. Calculer le rayon de convergence et la somme de chacune des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n;\quad \sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1};\quad \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}.$$

2. En déduire le rayon de convergence et la somme de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^n}{2^{n+1}};\quad \sum_{n\geqslant 0} (n^2+n+1)x^n;\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{2n}} x^{2n+1}.$$

$\boxed{49}$ En s'aidant de développements en série entière de fonctions classiques retrouver les fontions sommes des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)};\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{(n-1)!};\quad \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n};\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!} x^n.$$

$\boxed{50}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$. Cette série converge-t-elle pour $x = \pm R$ ?
2. Vérifier l'égalité $\sum_{n=1} f_n'(x) = x \arctan(x)$ pour $|x| < 1$.
3. En déduire la somme $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

$\boxed{51}$ On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^{n+1}$ de somme $f(x)$.

1. Calculer son rayon de convergence.
2. Etablir l'égalité $\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} = 4\binom{2n}{n} - \binom{2n+2}{n+1}$. En déduire une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par $f$.
3. Résoudre cette équation différentielle pour obtenir l'expression de $f(x)$ à l'intérieur de l'intervalle de convergence.

$\boxed{52}$ Pour chacune des équations différentielles suivantes, montrer qu'elle admet une solution $f$ développable en série entière satisfaisant la condition donnée. On explicitera la série entière et on donnera son rayon de convergence.

1. $xy'' + 2y' - xy = 2, \quad f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$
2. $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1, \quad f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = 0.$

$\boxed{53}$

1. Dans le développement en série entière de sinus, jusqu'à quel ordre suffit-il de sommer pour pouvoir approcher la valeur de $\sin(10^{-2})$ avec une incertitude de $10^{-15}$ ?
2. Rappeler le développement en série entière de $x \longrightarrow (1+x)^s$ où $s \in \mathbb{R}^*$ et la majoration de son reste quand $|s| \geqslant 1$. [Indication : la suite de terme général $|\binom{s}{n}|$ est décroissante.] En déduire une valeur approchée de $\sqrt[5]{33}$ à $10^{-5}$ près.

$\boxed{54}$ Trouver le développement en série entière et le rayon de convergence des série entières suivantes :

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad f(x) = \arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}; \quad f(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 + x}{(1-2x)(1-3x)(1-x)^2}.$$

$\boxed{55}$ Trouver la somme et le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_1 \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}; \quad \sum_0 (n^2+n+1)x^n; \quad \sum_0 \frac{nx^{2n+1}}{2^{2n}}; \quad \sum_1 \frac{(-1)^n x^{4n-1}}{4n}; \quad \sum_0 \frac{nx^n}{(n-1)!}.$$

$\boxed{56}$ Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes et la valeur de $f^{(n)}(0)$ en fonction de $n$ :

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}; \quad f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}; \quad f(x) = \frac{x^2+1}{(1+x)^3}; \quad f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad f(x) = \arcsin x; \quad f(x) = e^x \cos x.$$

$\boxed{57}$ Pour chacune des équations différentielles suivantes trouver les solutions développables en série entière :

- $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y + 1 = 0,$
- $xy'' + (x-2)\,y' - 2y = 0,$
- $(1 - x^2)y' - 2xy = 0,$
- $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2.$

# 5 Séries de Fourier

58 Soit $f$ la fonction réelle $2\pi$-périodique définie par $f(x) = 0$ si $-\pi < x \leqslant 0$ et $f(x) = 1$ si $0 < x \leqslant \pi$.

1. Calculer la série de Fourier de $f$. Calculer la somme de cette série de Fourier.
2. Etudier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

59 Soit $f$ la fonction réelle $2\pi$-périodique définie par $f(x) = 1 - x^2/\pi^2$ si $-\pi < x \leqslant \pi$.

1. Calculer la série de Fourier de $f$. Calculer la somme de cette série de Fourier.
2. Etudier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

60 Soit $f$ la fonction réelle $2\pi$-périodique définie par $f(x) = 0$ si $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ et $f(x) = x$ si $0 < x < \pi$.

1. Calculer la série de Fourier de $f$. Calculer la somme de cette série de Fourier.
2. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

61 Soit $f$ la fonction réelle $2\pi$-périodique définie par $f(x) = \pi - x$ si $0 < x < 2\pi$ et $f(0) = 0$

1. Calculer la série de Fourier de $f$. Calculer la somme de cette série de Fourier.
2. Que peut-on en déduire ?

62 Soit $f$ la fonction réelle $2\pi$-périodique définie par $f(x) = x$ si $-\pi < x \leqslant \pi$.

1. Calculer la série de Fourier de $f$.
2. Calculer la somme de cette série de Fourier en $\pi/2$ et en $\pi$.

63 Soit $f$ la fonction de période $2\pi$ telle que $f(t) = |t|$ si $-\pi < t < \pi$ et $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

1. Calculer le développement en série de Fourier de $f$.
2. Calculer $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et en déduire $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$.

64 $f$ est la fonction $2\pi$-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$ et exprimer son développement en série de Fourier.
2. Pour chacune des fonctions $2\pi$-périodiques suivantes justifier qu'elles sont développables en série de Fourier et écrire les développements correspondants :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], g(x) = x^3 - \pi^2 x, \quad h(x) = 3x^2 - \pi^2 \quad \text{et} \quad i(x) = x.$$

   [Indication : On pourra utiliser le théorème de dérivation.]

65 Soit la fonction réelle $2\pi$-périodique définie par $f(x) = x^2$ si $-\pi < x \leqslant \pi$.

1. Calculer la série de Fourier de $f$.

2. Calculer la somme de cette série de Fourier en 0, en $\pi/2$ et en $\pi$.

$\boxed{66}$ Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique impaire telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos(x)$ si $x \in ]0, \pi[$.

1. Construire le graphe de $f$ sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer le développement en série de Fourier $S(f)$ de $f$ et donner la valeur de $S(f)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la valeur de la somme de la série de terme général $u_n = ((2n)/(4n^2 - 1))^2$ pour $n$ strictement positif.

$\boxed{67}$ Soit $f$ la fonction 10-périodique définie par $f(x) = 1$ si $x \in [-5, 0[$ et $f(x) = 3$ si $x \in ]0, 5[$.

1. Construire le graphe de $f$ sur $[-15, 15]$.
2. Déterminer la série de Fourier $S(f)$ de $f$ et donner la valeur de $S(f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer la valeur de $S(f)(\pi/2)$ et en déduire la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

# 6 Intégrales généralisées

$\boxed{68}$ Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)(1+e^x)};\quad \int_1^{\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x;$$
$$\int_{\to a}^{\to b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\text{oùa<b};\quad \int_1^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+3)};\quad \int_{\to 0}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x;\quad \int_2^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)};\quad \int_0^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$$

$\boxed{69}$ Montrer que $\int_0^{\to+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle est nulle. [<u>Indication</u> : on pourra comparer les intégrales sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$. ]

$\boxed{70}$ Existence et calcul de $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$. [<u>Indication</u> : on pourra poser $u=\sqrt{1+t^2}$].

$\boxed{71}$ Pour chacune des intégrales ci-dessous, établir sa convergence :

$$I_1 = \int_0^{\to+\infty} \cos(t^2)\,dt;\quad I_2 = \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{\sin(5t)-\sin(3t)}{t^{5/3}}\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{72}$ Montrer que $\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ est semi-convergente. [<u>Indication</u> : utiliser la minoration $\frac{\sin^2(t)}{t} \leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$].

$\boxed{73}$ Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_{\to \frac{2}{\pi}}^{\to+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x;\quad \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ où } \alpha,\beta\in\mathbb{R}; \alpha\in\mathbb{R},\quad \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{74}$ Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes, et calculer, si possible, ces intégrales.

$$\int_0^{\to+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t,\quad \int_0^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\quad \int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}},\quad \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t},\quad \int_3^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},\quad \int_{\to 0}^{3} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},\quad \int_{\to 0}^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_{\to 1}^{0} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1-t)^2},$$
$$\int_0^{\to\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_0^{\to+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2},\quad \int_0^{\to+\infty} \frac{\arctan(t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\boxed{75}$ Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes :

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x;\quad \int_{\to 0}^{\to\infty} x^\alpha e^{-2x}\,\mathrm{d}x,\quad \int_{\to 0}^{1} \frac{1-e^x+3\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\boxed{76}$ Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes :

$$\int_{\to 0}^{1} \ln(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t;\quad \int_{\to 0}^{\to+\infty} te^{-t^2}\left(t^2\sin(t)-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

$\boxed{77}$ Soient $I=\int_0^{\to\pi/2} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_{\to 0}^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $J$ converge.

2. Montrer que $I = J$.[<u>Indication</u> : On pourra changer $x$ en $\frac{\pi}{2} - x$].
3. Montrer que $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \int_{\to 0}^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x$.
4. En déduire que $I = J = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

# 7 Intégrales à paramètre

$\boxed{78}$ Soient $f(t)=\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $g(t)=\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)+g^2(t)=\frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de $I=\int_0^{\to+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{79}$

1. Soit $f$ la fonction définie pour $(t,x)$ dans $[0,1]\times[0,1]$ par
$$f(t,x)=\begin{cases}\frac{xt}{(x^2+t^2)^2} & \text{si } (t,x)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (t,x)=(0,0).\end{cases}$$
   (a) Montrer que pout tout $x$ dans $[0,1]$, l'application $t\to f(t,x)$ est continue sur $[0,1]$, et que pour tout $t$ dans $[0,1]$, l'application $x\to f(t,x)$ est continue sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que $F(x)=\int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x$ dans $[0,1]$ et calculer sa valeur.
   (c) $F$ est-elle continue sur $[0,1]$ ?
   (d) Les hypothèses du théorème de continuité sous le signe somme sont-elles vérifiées ?
2. Mêmes questions pour la fonction $f$ définie pour $(t,x)$ dans $[0,1]\times[0,1]$ par
$$f(t,x)=\begin{cases}\frac{xt}{\sqrt{x^2+t^2}} & \text{si } (t,x)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (t,x)=(0,0)\end{cases}$$
3. Mêmes questions pour la fonction $f$ définie pour $(t,x)$ dans $[0,1]\times[0,1]$ par
$$f(t,x)=\begin{cases}\frac{xt}{x^2+t^2} & \text{si } (t,x)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (t,x)=(0,0)\end{cases}$$

$\boxed{80}$ On pose
$$F(x)=\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} e^{-t^2/2}\cos xt\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

$\boxed{81}$

1. Montrer que l'application $\varphi$ définie sur $]1,+\infty[$ par $\varphi(x)=\int_0^\pi \frac{1}{x-\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ est continue sur tout intervalle $[a,b]$ tel que $1<a<b$.
2. Soient $\varphi_1(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{x-\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ et , $\varphi_2(x)=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{x-\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que $\varphi_2(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{x+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que $\varphi_1(x)=\int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2(1+x)+x-1}$.
   (c) Montrer que $\varphi_2(x)=\int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}u}{x.u^2+2u+x}$.
   (d) En déduire la valeur de $\varphi_1(x)$.
   (e) En déduire la valeur de $\varphi_2(x)$.
   (f) Montrer que $\varphi(x)=\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$.

$\boxed{82}$ Pour $x$ réel positif, on note $F(x)=\int_{\to 0}^{\to+\infty}\frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction $F$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \int_0^{\to+\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{\to+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
4. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, |F(x)-\frac{\pi}{2}|\leqslant x\int_0^{\to+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la limite de $F$ en 0.

$\boxed{83}$

1. Montrer que $F(x)=\int_{\to 0}^{\to+\infty}e^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}\,\mathrm{d}t$ définit une fonction $F$ continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, F'(x)=-2F(x)$.
3. En déduire explicitement $F(x)$ en fonction de $x$ pour tout $x$ réel.

$\boxed{84}$ Pour $x$ réel, on pose $\Gamma(x)=\int_{\to 0}^{\to+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble D de définition de $\Gamma$.
2. i) Montrer que $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ si $\alpha>0$.
   ii) En déduire que $\Gamma(n+1)=n!$ si $n$ est un entier naturel non-nul.
3. Montrer que $\Gamma$ est de classe $C^\infty$ sur D et que $\forall n\in\mathbb{N}, \Gamma^{(n)}(x)=\int_{\to 0}^{\to+\infty}(\ln(t))^n e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que $\Gamma'$ est strictement croissante sur D. Montrer qu'il existe un unique réel $x_0$ de $]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0)=0$. En déduire les variations de $\Gamma$ sur D.

$\boxed{85}$ Soit $F(x)=\int_{\to 0}^{\to+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-tx}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $[0+\infty[$ et que $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$. [<u>Indication</u> : On pourra majorer $|F(x)|$ par $\frac{1}{x}$.]
2. Montrer que F est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[, F'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$ et que $F(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$.
4. Admettant que F est continue également en 0, déduire des résultats précédents la valeur de $\int_{\to 0}^{\to+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

# 8 Transformation de Laplace

86 Montrer que $\mathscr{L}(t^{\alpha-1})(p)$, où $\alpha > 0$, existe si $\Re e\,(p) > 0$. On admettra que $\mathscr{L}(t^{\alpha-1})(p) = \Gamma(\alpha)/p^{\alpha}$.

87 Calculer $\mathscr{L}(\sin(t))(p)$ et $\mathscr{L}(\cos(t))(p)$ si $\Re e\,(p) > 0$.

88 Calculer $\mathscr{L}(e^{\alpha t})(p)$ si $\Re e\,(p) > \alpha$.

89 Montrer que, si $a$ est un nombre réel strictement positif alors

$$\mathscr{L}(f(at))(p) = (1/a)\mathscr{L}(f(t))(p/a).$$

En déduire $\mathscr{L}(\sin(\omega t))(p)$ et $\mathscr{L}(\cos(\omega t))(p)$.

90 On suppose que $f$ est dérivable et que $\mathscr{L}(f(t))(p)$ et $\mathscr{L}(f'(t))(p)$ existent si $\Re e(p) > a$. Montrer que

$$\mathscr{L}(f(t))(p) = p\mathscr{L}(f(t))(p) - f(0^+).$$

91 On suppose que $f$ est deux fois dérivable et que $\mathscr{L}(f(t))(p)$, $\mathscr{L}(f'(t))(p)$ et $\mathscr{L}(f''(t))(p)$ existent si $\Re e\,(p) > a$. Montrer que

$$\mathscr{L}(f''(t))(p) = p^2\mathscr{L}(f(t))(p) - pf'(0^+) - f(0^+).$$

92 Utiliser les résultats précédents pour résoudre les équations différentielles suivantes.

$$y' + y = \sin(t),\ y(0) = 1; \quad y'' + 3y' + 2y = \sin(t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad y'' + y' - 2y = e^{-2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

93 Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Dans chaque cas suivant calculer $\mathscr{L}g$ en fonction de $\mathscr{L}f$.

1. $g(t) = \begin{cases} f(at-b) & \text{si } t > b/a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $g(t) = e^t f(t)$.
3. $g(t) = f(\frac{t}{a})$ où $a > 0$.
4. $g(t) = f(t) + 1$.

94 Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformation de Laplace et du tableau des transformées classiques. $y'' + y = t$ sous les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$

# 9 Annales

ANNÉE : 2007/2008 | Devoir surveillé 1

**UE : PNG301**

**Date :** samedi 20 octobre 2007 | **Durée :** 1h20

Documents et téléphones mobiles interdits

Epreuve de G. Ricotta

*Les trois exercices sont indépendants. L'énoncé comporte 2 pages.*

**Exercice 1.** Trouver et justifier soigneusement la nature des séries suivantes.

1.
$$\sum \log \left(1 + \frac{n^3 - 4}{2(n-1)(n^2-2)}\right)$$
où log désigne le logarithme népérien.

2.
$$\sum \frac{\sin(2n)\,(\log(n))^{10}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

3.
$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,(\log(n))^{10}}.$$

4.
$$\sum \frac{(\log(n))^{10}}{n}.$$

**Exercice 2.** Considérons l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad 3xy' + (2-5x)y = x.$$

Soit $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une éventuelle solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie
$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \frac{1}{5}, \\ a_n &= \frac{5}{3n+2} a_{n-1} \end{aligned}$$
pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

2. En déduire par récurrence sur $n$ que
$$a_n = \frac{5^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n}(3k+2)}$$
pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

3. Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{5^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n}(3k+2)} x^n.$$

4. L'équation différentielle (E) admet-elle une solution développable en série entière ? Si oui, laquelle et sur quel intervalle ?

**Exercice 3.** Soit $f : ]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{(2-x)}$$

pour tout nombre réel $x \leqslant 2$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 0$ et

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. Trouver le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-\infty, 2]$.
2. Tracer sur le même dessin l'allure du graphe de la fonction $f$ et de la droite d'équation $y = x$. Représenter sur ce dessin les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Pensez-vous que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge ? Si oui, vers quelle limite ?
3. Montrer par récurrence sur $n$ que
$$0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2}$$
pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
4. Montrer que
$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{\sqrt{(2-u_n)} + 1}$$
pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
5. En déduire en justifiant votre réponse que
$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{2})} + 1} |u_n - 1|$$
pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
6. Montrer par récurrence sur $n$ que
$$|u_n - 1| \leqslant \left( \frac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{2})} + 1} \right)^{n-1} |u_1 - 1|$$
pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
7. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en justifiant soigneusement votre réponse.

**FIN**

Année 2007/2008 | Devoir surveillé n°2
Samedi 10 novembre 2007 | UE : PNG301
Documents et téléphones mobiles interdits | durée : 1h20
Epreuve de F.Levron

*Les trois exercices sont indépendants. L'énoncé comporte 1 page.*

**Exercice 1**

On considère la fraction rationnelle $f(x)=\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}$.

1) Mettre cette fonction sous la forme : $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$.

2) Soit $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Calculer F(x).

3) Si x tend vers $+\infty$, est-ce que F(x) tend vers une limite ? Si oui, vers laquelle ?

**Exercice 2**

On considère la fonction f(x) périodique, de période $2\pi$, telle que
$f(x)=\sin(x/2)$ si $0\leq x<2\pi$.
1) Tracer sommairement le graphe de cette fonction sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
2) Montrer que f est une fonction paire.
3) Calculer les coefficients de Fourier de f.
   Aide : on rappelle que $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b)$.
4) Soit S(x) la somme de la série de Fourier de f en x.
   Montrer que $S(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{(1/4-n^2)}$.
5) Quelle est la relation entre S(x) et f(x) ?
6) Calculer $S(\pi)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.
7) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1/4-n^2)^2}$.

**Exercice 3**

Soit $f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, où $x\neq 1$.
1) Calculer la dérivée de f(x).
2) En déduire le développement en série entière de f(x).
3) Quel est le rayon de convergence de cette série ?
4) Peut-on simplifier l'expression de f(x) si $x\neq 1$ ?

FIN

**ANNEE UNIVERSITAIRE 2007/2008**

**Session 1 d'automne**

**UE : PNG301**

**Date :** 21 décembre 2007 **Durée :** 3h

Documents non autorisés

Epreuve de M. Olivier

*Les cinq exercices sont indépendants. L'énoncé comporte trois pages.*

*Barème indicatif : 2 points par question, puis lissage.*

**Exercice 1.**

Trouver et justifier la nature des séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3+\ln n}{(n+3)^2}, \quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{\sin n \operatorname{Arctan}(n^2+1)}{n^2+1}.$$

**Exercice 2.**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2\, y'' - 4x\, y' + (x^2+6)\, y = 0.$$

On cherche les solutions développables en série entière autour de $x = 0$ de cette équation différentielle.

Soit $y = \sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ une telle solution.

**1.** Démontrer que $a_0 = a_1 = 0$.

**2.** Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a $(n-2)(n-3)\, a_n = -a_{n-2}$.

**3.** En déduire que $a_2$ et $a_3$ sont quelconques.

**4.** Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\, a_2$, et que $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, a_3$.

**5.** Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

**6.** En déduire que la solution générale de l'équation différentielle donnée est $y = a_2 x^2 \cos x + a_3 x^2 \sin x$.

**Exercice 3.**

Soit $f$ la fonction périodique de période $2\pi$, telle que pour $x \in ]-\pi, +\pi]$, $f(x) = x \sin x$.

**.../...**

**1.** Dessiner sommairement le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-3\pi, +3\pi]$

**2.** Que valent les coefficients $b_n$ de la série de Fourier de $f$ ?

**3.** Calculer $a_0$.

**4.** Calculer $a_1$.

**5.** Montrer que pour $n \geq 2$ on a : $\sin x \cos nx = \dfrac{1}{2}\,(\sin(n+1)x + \sin(1-n)x)$.

**6.** Calculer pour $n \geq 2$, le coefficient $a_n$.

**7.** Soit $S(f)(x)$ la valeur de la série de Fourier de $f$ au point $x$. Que vaut $S(f)(x)$ (justifier) ?

**8.** En prenant $x = 0$, calculer $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n^2-1}$.

**9.** En prenant $x = \pi$, calculer $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^2-1}$.

**10.** En utilisant un théorème du cours, calculer $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{(n^2-1)^2}$.

**Exercice 4.** *(Les questions 1 et 2 suivantes sont indépendantes).*

**1.** Au moyen de changements de variable ou d'intégrations par partie, calculer les intégrales suivantes et dire pour quelles valeurs de la variable $x$ elles sont définies :

$$\int \frac{x}{x^4 - x^2 - 2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx.$$

**2.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2(nx)}.$$

**a.** A l'aide d'un changement de variable, démontrer que

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leq k\leq n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t}.$$

**b.** Démontrer que pour tout $k$ tel que $0 \leq k \leq n-1$ on a

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t} = I_1.$$

**c.** En déduire que $I_n = I_1$.

**d.** Calculer $I_1$ et par conséquent $I_n$.

.../...

**Exercice 5.**

On considère la fonction $f$ de deux variables $x$ et $t$ définie sur le domaine $\mathbb{R}\times[0,\dfrac{\pi}{2}]$ par

$$f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Arctan}(x\sin t)}{\sin t} & \text{si } t\neq 0,\\ x \quad \text{si } t=0.\end{cases}$$

Soit enfin $g(x)=\int_0^{\pi/2} f(x,t)\,dt$.

On admettra dans la suite *sans démonstration* toutes les propriétés de continuité et de dérivabilité nécessaires pour justifier les calculs.

**1.** Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ pour tout $(x,t)$ dans le domaine de définition de $f$. On veillera à calculer séparément $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$.

**2.** Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

**3.** Que vaut $g(0)$ ? En déduire $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

**FIN**

| | | |
|---|---|---|
| UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies<br>DISVE<br>Licence | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2007/2008**<br>SESSION 2 D'AUTOMNE<br><br>**ETAPE : MEC3, PHQ3, SCP3 , EEA3, CSB5** **UE : PNG301**<br>**Epreuve : Mathématiques**<br>**Date :** **Heure :** **Durée :** 3h<br>Documents : non autorisés<br>Epreuve de M J.L. Artigue et Me G. Godinaud | Département Licence |

**Exercice 1** : Soit l' équation différentielle

$$(E)\begin{cases} (x^2+1)y''-2y=0 \\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $f$, développable en série entière au voisinage de 0 qui vérifie $(E)$. On a donc $f(x)=\Sigma a_n x^n$, les coefficients $a_n$ vérifiant une relation de récurrence que l'on déterminera.

2. Donner l'expression générale des $a_n$ et déterminer le rayon de convergence $R$ de cette série entière.

3. (a) Rappeler le développement en série entière de $\arctan(x)$.

   (b) A partir de son développement en série entière, calculer la fonction $f(x)$ solution de l'équation différentielle $(E)$.

**Exercice 2** : Soit le réel $\lambda$ tel que $0<\lambda<2\pi$. On définit la fonction $f_\lambda$ $2\pi$-périodique de la façon suivante

$$f_\lambda(x)=\begin{cases} +1 & \text{si } 0\le x<\lambda \\ -1 & \text{si } \lambda\le x<2\pi \end{cases}$$

1. Tracer $f_\lambda$ sur $[-3\pi,+3\pi]$.

2. Déterminer la série de Fourier de $f_\lambda$.

3. Etudier la convergence de la série de Fourier de $f_\lambda$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\lambda}{n}$.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n\lambda}{n}$. Discuter en fonction des valeurs de $\lambda$.

6. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{\sin n(\lambda/2)}{n})^2$, en utilisant Parceval-Bessel

## Exercice 3 :

1. Calculer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

3. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{(\cos(t)+1)(2-\sin^2(t))}dt$ en utilisant un changement de variable.

**Exercice 4** : Pour tout réel $x$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\sin((1+t^2)x)}{1+t^2}dt$.

1. Calculer $F(0)$. Montrer que $F$ est impaire et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $F$ est dérivable sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   Pour tout $x > 0$, exprimer $F'(x)$ en fonction de $x$ sans intégrale.

3. En utilisant un changement de variable, montrer que pour tout réel $x$ non nul
   $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(u)}{u}du$ et retrouver l'expression de $F'(x)$.

4. (a) Ecrire le développement en série entière de $\phi$, définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \sin(2x) - \sin(x)$. En déduire que $g$ définie par $g(x) = \dfrac{\phi(x)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = \dfrac{1}{2}$, admet un développement en série entière que l'on exprimera et dont on donnera le rayon de convergence.
   
   (b) Donner le développement en série entière de $G$, primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 0$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière?

5. (a) Montrer que $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = G(x) + k$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(x)$.
   
   (b) Pourquoi $F$ est-elle $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$? Pour tout entier naturel n, donner l'expression de $F^{(n)}(0)$. (On pourra distinguer les cas où $n$ est impair de ceux où il est pair).

Année : 2008/2009 | Université Bordeaux 1
Contrôle continu no 1 | **UE : PNG 301**
**Date :** 18 octobre 2008 | **Durée :** 1h30
Documents non autorisés
Responsable de l'épreuve : M. Olivier

*Les trois exercices sont indépendants. L'énoncé comporte une page.*

**Exercice 1.**

Trouver et justifier la nature des séries

$$\sum_{n\geq 3} \frac{(n+1)\ln\ln n}{(n^3+3)(\ln n)^2}, \quad \sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln\ln n)^3}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\theta n)(\ln n)^5}{(n^2+2)}, \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2.** On considère l'équation différentielle

$$x\,y'' + y' + x\,y = 0.$$

Démontrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation différentielle développable en série entière autour de $x = 0$ et telle que $y(0) = 1$. Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

**Exercice 3.**

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} (x+1)\cos 3x\,dx.$$

FIN

ANNÉE : 2008/2009 — DS2

**UE : PNG301**

**Date :** samedi 29 novembre 2008 — **Durée :** 1h30

Documents non autorisés

Epreuve de G. Ricotta

*Les trois exercices sont indépendants. L'énoncé comporte 1 page.*

**Exercice 1.** Trouver et justifier la nature des intégrales généralisées

$$\int_{\to 0}^{1/3} \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^3}, \qquad \int_{2}^{\to+\infty} \frac{\sin(3x)(\ln x)^5}{x^2+2}.$$

**Exercice 2.** Considérons la fraction rationnelle

$$R(x) = \frac{5x-3}{(x^2+3x+3)^2}.$$

1. Montrer que $R$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe des constantes réelles $a$ et $b$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = a \times \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^2} + \frac{b}{(x^2+3x+3)^2}.$$

3. Trouver toutes les primitives de $\frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$. Indication : faire une intégration par parties à partir de $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.
5. Trouver toutes les primitives de $R$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire et $2\pi$-périodique définie par

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = x(\pi - x).$$

1. Tracer l'allure du graphe de $f$ sur $[-3\pi, +3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier formelle $S(f)(x)$ de $f$.
3. Donner les raisons pour lesquelles

$$\forall x \in [0, \pi], \quad x(\pi - x) = S(f)(x).$$

4. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ converge et en déduire (à partir des questions précédentes) sa somme.
5. Montrer que $\sum \frac{1}{(2n+1)^6}$ converge et calculer sa somme.

**FIN**

**Année universitaire : 2008/2009**

**Session d'automne 2008**

**UE : PNG301**

**Epreuve : Mathématiques**

**Date :** 22 décembre 2008 **Durée :** 3 heures

Documents non autorisés

Responsable de l'épreuve : M. F. Levron

---

*Les six exercices sont indépendants. L'énoncé comporte trois pages.*

*Dans tous les exercices,* $\ln(x)$ *désigne le logarithme népérien de* $x$.

---

**Exercice 1.**

On considère la série numérique dont le terme général est $u_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1}$, où $n \geq 0$.

**1.** Calculer les sommes partielles de cette série.

**2.** En déduire la convergence et la valeur de la somme de cette série.

**Exercice 2.**

**1.** Montrer que, si $n$ tend vers l'infini, $\sqrt{n^2+1} - n$ est équivalent à $\dfrac{1}{2n}$.

**2.** La série $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ est-elle convergente?

**3.** La série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ est-elle convergente?

**4.** Montrer que, pour tout $x$ réel, $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin(x)$.

**5.** En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ est convergente.

**Exercice 3.**

On considère l'équation différentielle suivante :

.../...

$$(1-x^2)y' = xy + 1, \quad y(0) = 0.$$

On cherche la solution $y(x)$ sous la forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

**1.** Calculer les quatre premiers coefficients de cette série et déterminer une relation de récurrence permettant de calculer tous les coefficients.

**2.** Donner une expression de $a_n$ suivant la parité de $n$.

**3.** Quel est le rayon de convergence de cette série entière?

**4.** Vérifier que $y(x) = \dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est la solution de cette équation différentielle.

**5.** En déduire, par intégration, le développement en série entière autour de 0, de $(\mathrm{Arcsin}(x))^2$.

**Exercice 4.**

On considère la fonction $f(x)$ périodique de période $T = 2\pi$ telle que $f(x) = \dfrac{x^2}{\pi^2}$ si $x \in [-\pi, \pi[$.

**1.** Tracer sommairement le graphe de $y = f(x)$ si $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

**2.** Calculer les coefficients de Fourier de $f(x)$.

**3.** Expliciter la somme $S(f)(x)$ de la série de Fourier de $f(x)$. Quel est le lien entre $S(f)(x)$ et $f(x)$?

**4.** Déterminer $S(f)(0)$ et $S(f)(\pi)$. Que peut-on en conclure?

**5.** En utilisant cette série de Fourier, calculer $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^4}$.

**Exercice 5.**

On considère l'intégrale généralisée $I = \int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

Le but est de montrer que cette intégrale converge et de calculer sa valeur. Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}$.

**1.** Donner une primitive de $\ln(x)$.

**2.** Déterminer un nombre $a \in ]0,1[$ tel que $|f(x)| \leq 2|\ln(x)|$ si $x \in ]0,a]$.

**3.** Déterminer un nombre $b \in ]0,1[$ tel que $|f(x)| \leq 2\sqrt{1-x}$ si $x \in [b,1[$.

**4.** En déduire que l'intégrale converge.

**5.** Calculer $I$ en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{1-x}$.

.../...

**Exercice 6.**

Soit $f(x) = \int_0^1 \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\, dt$ et soit $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$, où $x$ est réel.

**1.** Montrer que les fonctions $f$ et $g$ sont définies et continues sur l'ensemble des réels.

**2.** Calculer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**3.** Montrer que $f(x)$ est dérivable et calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.

**4.** En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de $g(x)$.

**5.** En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$.

FIN

| | |
|---|---|
| Département de Licence | ANNEE 2008-2009 SESSION DE JANVIER 2009<br>**UE : PNG301**<br>**Epreuve de :** *Mathématiques*<br>L.Nikolskaia<br>**Date :08.06.2009** **Durée : 3h**<br>Documents : non autorisés |

# Problème

## Première partie

1. Montrer que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{nn!} \quad (1) \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{nn!} \quad (2)$$

convergent. On note $C_1$ et $C_2$ les sommes des séries (1) et (2) respectivement.
2. Donner le développement en sèrie entiére de la fonction $e^{-x}$ et préciser le rayon de convergence.
3. Enoncer le théorème d'intégration des séries entières.
4. Appliquer ce théorème pour montrer que

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}dx = \ln 2 + C_2 - C_1. \quad (*)$$

5. Montrer que la fonction $F$ définie sur $R$ par

$$F(t) = \int_1^2 \frac{e^{-tx}}{x}dx$$

est dérivable sur $R$ et donner, pour tout $t \in R$, l'expression explicite de $F'(t)$.
6. Donner les valeurs exactes de $F(0)$ et $F'(0)$.
7. Développer la fonction $F'$ en série entière et préciser le rayon de convergence.
8. En déduire le développement en série entière de la fonction $F$.
9. Retrouver l'égalité

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}dx = \ln 2 + C_2 - C_1 \quad (*)$$

.

## Deuxième partie

10. Montrer que, pour $Re(p) > 0$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} e^{-pt} dt$$

converge.
11. On rappelle que la fonction $F$ est définie sur $R$ par $\int_1^2 \frac{e^{-tx}}{x} dx$. Déduire de la question 10 que les fonctions $\phi$ et $\psi$ définies par

$$\phi(t) = \begin{cases} F'(t) & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad , \quad \psi(t) = \begin{cases} F(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

admettent la transformation de Laplace.
12. On note $\overline{\phi}$ la transformée de Laplace de $\phi$ et $\overline{\psi}$ la transformée de Laplace de $\psi$. En sachant que, pour $t \neq 0$, $\psi'(t) = \phi(t)$, montrer l'égalité

$$p\overline{\psi}(p) = \overline{\phi}(p) + \ln 2.$$

13. En déduire (en utilisant la formule $\frac{\overline{\phi}(p)}{p} \div \int_0^t \phi(x)dx$) que, pour $t \geq 0$,

$$F(t) = \ln 2 + \int_0^t \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx. \quad (4)$$

14. Retrouver l'égalité

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx = \ln 2 + C_2 - C_1 \qquad (*).$$

## Exercice

Soit $f$ la fonction $2\pi$-péridique définie par

$$\begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, \pi[ \\ -1 & si \quad x \in [-\pi, 0[ \end{cases}$$

1. Construire le graphe de $f$ sur $[-\pi, \pi]$.
2. On note $S(f)$ la série de Fourier de $f$. Donner la valeur de $S(f)(x)$ pour $x \in R$.
3. Evaluer la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

| | | |
|---|---|---|
| UNIVERSITE BORDEAUX 1 Sciences Technologies | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2009/2010**<br>SEMESTRES 3 ET 5 .CONTROLE CONTINU<br><br>**PARCOURS : CSB, EEA, MEC, PHQ, SCP** **UE : PNG 301**<br><br>**Epreuve : MATHEMATIQUES DEVOIR SURVEILLE N°1**<br><br>**Date :** Samedi 17 Octobre 2009 **Heure :** 8h30 **Durée :** 1 heure 30<br><br>**Documents :** Sans document<br><br>Epreuve de M : Jean-Louis ARTIGUE | Département DL Licence |

Barème indicatif sur 25 : -I-(6) ; -II-(7) ; -III-(4) ; -IV-(8)

-I- Etudier la nature de chacune des séries suivantes :

-1) $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}.\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ; -2) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$ ; -3) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

-II- On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n.(n+1)}$ .

-1) Justifier brièvement mais avec précision, la convergence de cette série.

-2) Pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.(k+1)}$, la somme partielle d'ordre $n$ de cette série.

Décomposer $\frac{1}{k.(k+1)}$ sous la forme $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ puis calculer $S_n$ en fonction de $n$ .

-3) En déduire la somme de la série étudiée.

-III- La décomposition obtenue ci-dessus pourra être utile dans cet exercice.

Calculer chacune des deux intégrales $I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x.(x+1)}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos(t).(1+\cos(t))}\,dt$

-IV- -1) Pour chacune des fonctions $f$ et $g$ définies ci-dessous, donner son développement en série entière et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1-2x}$$

-2) On considère la fonction $h$ définie par $h(x) = \frac{-x+2}{(1+x)(1-2x)}$ .

-a- Montrer que l'on peut décomposer h(x) sous la forme $h(x) = a.f(x) + b.g(x)$ (où a et b sont réels) .

-b- En déduire le développement en série entière de h(x), son rayon de convergence et donner en fonction de l'entier $n$ la valeur de $h^{(n)}(0)$.

| | | |
|---|---|---|
| UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies<br>DISVE<br>Pôle Licence | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2009/2010**<br>**DEVOIR SURVEILLE N°2**<br><br>**PARCOURS :CSB,EEA,MEC,PHQ,SCP Code UE : PNG301**<br>**Epreuve : Mathématiques**<br>**Date : samedi 28 novembre 2009 Heure :8h30 Durée :1h30**<br>Documents : non autorisés<br>Epreuve de M : F.Levron | Département Licence |

**Barème indicatif sur 25 : I =5, II=10, III=10**

**Exercice 1**

Le but est de calculer les intégrales $I=\int_1^{\to+\infty} f(t)dt$ et $J=\int_{\to 0}^{1} f(t)dt$ , où $f(t)=\frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}$ .

1) Montrer que I et J convergent.

2) Calculer I et J.

3) En déduire $\int_{\to 0}^{\to+\infty} f(t)dt$.

**Exercice 2**

Soit f(x) la fonction paire et $2\pi$-périodique telle que $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ si $x\in[0,\pi]$.

1) Représenter graphiquement y=f(x) sur l'intervalle $[-2\pi,+2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f(x).

3) En déduire la série de Fourier F(x) de f(x).

4) Comparer F(x) et f(x).

5) Calculer $F(\pi)$. En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ .

**Exercice 3**

Le but est de calculer l'intégrale $F(x)=\int_{\to 0}^{\to 1} f(t,x)dt$, où $f(t,x)=\frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$ , où $x\geq 1$.

1) Soit $x\geq 1$ et soit $g(t)=t^{x-1}-1-(x-1)\ln(t)$. Montrer que $g(t)\geq 0$ si $t\in]0,1]$.

2) En déduire que $0<f(t,x)\leq x-1$ si $x\geq 1$ et $t\in]0,1[$.

3) Montrer que , si $x\geq 1$, l'intégrale F(x) converge et que la fonction F(x) est continue pour $x\geq 1$.

4) Montrer que F(x) est dérivable et calculer sa dérivée.

5) Calculer F(1) et en déduire la valeur de F(x).