MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°7 (correction)

EXERCICE 1

1. Il suffira de montrer que $\big((1,2,0,-3),(0,1,-2,1),(1,2,1,-2),(-1,0,-5,5)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (en effet, d'après le cours, il existe une unique application linéaire définie par ses images sur une base).

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&0&-3\\0&1&-2&1\\1&2&1&-2\\-1&0&-5&5\end{pmatrix} &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&0&-3\\0&1&-2&1\\0&0&1&1\\0&2&-5&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4+L_1\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&0&-3\\0&1&-2&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} \quad (L_4\leftarrow L_4-2L_2)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&0&-3\\0&1&-2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} (L_4\leftarrow L_4+L_3)\\
&= 4.
\end{aligned}$$

Le rang de cette famille est 4, son cardinal est 4 aussi, et la dimension de $\mathbb{R}^4$ est 4. On en déduit qu'il s'agit bien d'une base.

2. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. On cherche $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ tels que :

$$x(1,2,0,-3)+y(0,1,-2,1)+z(1,2,1,-2)+t(-1,0,-5,5)=(a,b,c,d).$$

On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z-t &=& a\\ 2x+y+2z &=& b\\ -2y+z-5t &=& c\\ -3x+y-2z+5t &=& d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z-t &=& a\\ y+2t &=& b-2a\\ -2y+z-5t &=& c\\ y+z+2t &=& d+3a\end{array}\right. \begin{pmatrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_4\leftarrow L_4+3L_1\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z-t &=& a\\ y+2t &=& b-2a\\ z-t &=& c+2b-4a\\ z &=& 5a-b+d\end{array}\right. \begin{pmatrix}L_3\leftarrow L_3+2L_2\\L_4\leftarrow L_4-L_2\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5a-2b-c\\ y &=& -20a+7b+2c-2d\\ z &=& 5a-b+d\\ t &=& 9a-3b-c+d\end{array}\right..$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
f(a,b,c,d) &= x(1,2,-1,4)+y(1,5,0,1)+z(0,-3,-1,3)+t(0,-6,-2,6)\\
&= \big(-15a+5b+c-2d,-159a+52b+14c-19d,-28a+9b+3c-3d,69a-22b-8c+7d\big)
\end{aligned}$$

3. $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big((1,2,-1,4),(1,5,0,1),(0,-3,-1,3),(0,-6,-2,6)\big)$ (car ce sont les images d'une base).

   On remarque que $(0,-6,-2,6) = 2(0,-3,-1,3)$ et $(1,5,0,1) = (1,2,-1,4)-(0,-3,-1,3)$ donc ces deux vecteurs sont combinaison linéaire des autres deux. on en déduit que $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big((1,2,-1,4);(0,-3,-1,3)\big)$ de plus les deux vecteurs restants sont non colinéaires, donc ils forment une base de $\text{Im}(f)$ qui a donc dimension 2. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2. On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -15 & 5 & 1 & -2 \\ -159 & 52 & 14 & -19 \\ -28 & 9 & 3 & -3 \\ 69 & -22 & -8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -15 & 5 & 1 & -2 \\ -9 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 9 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 4 & 1 \\ -15 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 17 & 11 \\ 0 & -5 & 17 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ \quad - 5y + 17z + 11t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{6}{5}z + 35t \\ y = \frac{17}{5}z + \frac{11}{5}t \end{cases}$$

   On en déduit que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\big((6,17,5,0),(3,11,0,5)\big)$.

4. f n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.

EXERCICE 2

1. L'équation homogène est :
$$(1+x^2)y' - 3xy = 0 \quad (E_H)$$
   comme $1 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cette équation est aussi équivalente à :
$$y' - \frac{3x}{1+x^2}y = 0 \quad (E'_H)$$
   On pose $a(x) = -3\dfrac{x}{1+x^2}$.

   On prend une primitive : $A(x) = -\dfrac{3}{2}\cdot \ln(1+x^2)$.

   On en déduit que la solution générale de l'équation homogène est de la forme
$$\boxed{y_g(x)} = \lambda \cdot e^{\frac{3}{2}\ln(1+x^2)} = \boxed{\lambda(1+x^2)^{3/2}.}$$

2. On cherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

   On a donc $y'_P(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$.

   En remplaçant on a :
$$(1+x^2)(3Ax^2 + 2Bx + C) - 3x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 1$$
   On développe et on identifie pour obtenir le système :
$$\begin{cases} -B = 0 \\ 3A - 2C = 0 \\ 2B - 3D = 0 \\ C = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = 0 \\ D = 0 \\ C = 1 \\ A = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On a donc trouvé une solution particulière de la forme :

$$\boxed{y_P(x) = \frac{2}{3}x^3 + x.}$$

On peut conclure que toutes les solutions de l'équation différentielle donnée sont de la forme :

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + \lambda(1+x^2)^{3/2}.} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

3. Au voisinage de $\pm\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^{3/2} &= \left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^{3/2} \\
&= x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2} \\
&= x^3\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\
&= x^3+\frac{3}{2}x+o(1).
\end{aligned}$$

4. Au voisinage de $+\infty$ on a : $y(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + x + \lambda\left(x^3 + \dfrac{3}{2}x + o(1)\right)$. On fait une disjonction de cas :

   - Si $\lambda = -\frac{2}{3}$ on a : $y(x) = o(1)$ donc $y(x) \to 0$.
   - Si $\lambda \neq \frac{2}{3}$ on a $y(x) \sim \left(\frac{2}{3}+\lambda\right)x^3 \to \pm\infty$.

   On en déduit que g est l'unique solution admettant une limite finie en $+\infty$.

5. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 2x^2+1-(1+x^2)^{1/2}\cdot 2x = 2x^2+1-2x\sqrt{1+x^2} = \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2 > 0.$$

   On en déduit que g est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$.
   De plus, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (vu à la question précédente) et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (somme de deux limites, chacune égale à $-\infty$).

PROBLÈME 1

Partie I

1.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1)$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

$$= \boxed{3.}$$

2. A est inversible car son rang est maximal (3).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow 1/2 L_1 \\ L_3 \leftarrow 1/2 L_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 1/2 L_2 - 1/2 L_3)$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ (faire la vérification!).

3. En développant suivant la ligne 2 :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = \boxed{2.}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ y + z \\ -x + y + z \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $f(x, y, z) = (2x - y + z, y + z, -x + y + z)$.

5. $\det(A) \neq 0$ donc f bijective (donc injective et surjective) donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Partie 2

6. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$

$\mathscr{B}$ est une famille de trois éléments, de rang 3 dans un espace vectoriel de dimension 3. On en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

7. On a : $f(b_1)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=2b_1$.

   De la même manière, on montre que $f(b_2)=b_2$ et $f(b_3)=b_2+b_3$.

   On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}/$

8. On a $P=\mathscr{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

9. $P'=\mathscr{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}=P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

10. On sait que $A=\mathscr{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}T\mathscr{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$.

    Donc $A=PTP'$.

Partie 3

11. $T=D+N$ avec $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

12. $N^0=I$. $N^1=N$. $N^2=0$. $\forall k\geqslant 2,\ N^k=0$ (récurrence immédiate).

13. On vérifie que D et N commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}T^n=(D+N)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kD^{n-k}\\&=\binom{n}{0}N^0D^n+\binom{n}{1}N^1D^{n-1}\\&=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1^n&0\\0&0&1^n\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

14. On a $A=PTP^{-1}$ et, par récurrence facile, $A^n=PT^nP^{-1}$.

15.

$$\begin{aligned}A^n&=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&1&n\\2^n&1&n\\2^n&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}n+1&-n&n\\n+1-2^n&2^n-n&n\\1-2^n&2^n-1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Partie 4

16. On remarque facilement que $X_{n+1} = AX_n$.

17. Par récurrence facile on obtient $X_n = A^n X_0$.

18. $X_n = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n+1-2^n & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1-2^n \\ 1-2^n \end{pmatrix}$.

PROBLÈME 2

Partie 1

f est dérivable par somme de fonctions dérivables, et on a, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

1.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, on en déduit que la courbe possède une asymptote verticale (à gauche de la courbe) d'équation $x = 0$.

   On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. On calcule alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x) = -\infty$. On en déduit que la courbe possède une branche parabolique en $+\infty$, de direction la droite d'équation $y = x$.

3.
$$\begin{aligned} \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2} - t\ln(t) + t\right]_1^3 \\ &= \frac{9}{2} - 3\ln(3) + 3 - \frac{1}{2} + 0 - 1 \\ &= \boxed{6 - 3\ln(3).} \end{aligned}$$

4. (a) On remarque que f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, et $f(]0,1[) =]1,+\infty[$. On en déduit (d'après le théorème de la bijection monotone) que f induit une bijection de $]0,1[$ dans $]1,+\infty[$. Or, $2 \in]1,+\infty[$ donc 2 possède un unique antécédent par f dans $]0,1[$.

   De même, f est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, donc induit une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$. Par conséquent, 2 possède un unique antécédent par f dans $]1,+\infty[$.

   (b) On a $f(2) = 2 - \ln(2) \simeq 1{,}3$ et $f(4) = 4 - \ln(4) \simeq 2{,}6$ donc on en déduit (théorème des valeurs intermédiaires, plus unicité déjà prouvée) que $b \in [2,4]$.

Partie 2

5. On a $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

   On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(x) + 2$.

   On sait que $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$ ou encore $\ln(b) + 2 = b$. On en déduit que b est un point fixe de φ.

   φ est continue et strictement croissante. On a $\varphi(b) = b$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. On en déduit que $\forall x \in [b, +\infty[$, $\varphi(x) \in [b, +\infty[$. Donc $[b, +\infty[$ est un invervalle stable pour φ. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$.

6. φ est strictement croissante que $[b, +\infty[$. On en déduit, d'après le cours, que (u_n) est une suite monotone.

   On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \varphi(x) - x$.

   On a $g(x) = \ln(x) + 2 - x = -(f(x)) + 2$. Or, on sait que pour tout $x \in]b, +\infty[$, $f(x) > 2$ (voir le tableau de variations de f, sachant que $f(b) = 2$). On en déduit que $\forall x \in]b, +\infty[,\ g(x) < 0$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ et donc (u_n) est décroissante.

7. On a : (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite ℓ telle que $\varphi(\ell) = \ell$.

   On a : $\varphi(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x - \ln(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = b$ (seul point fixe de φ dans $[b, +\infty[$).

   On conclut que (u_n) converge vers b.

Partie 3

8. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ (car f ne s'annule pas sur cet intervalle et f continue).

   On en déduit que h admet une primitive H, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

   On a : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Phi(x) = H(2x) - H(x)$.

   Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ par somme et composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\
&= 2\frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\
&= \frac{2(x - \ln x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln x)} \\
&= \frac{\ln(2x) - 2\ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \frac{\ln(2) + \ln(x) - 2\ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.
\end{aligned}$$

9. On a $\ln(2) - \ln(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $\ln(2) \geqslant \ln(x)$, ssi $2 \geqslant x$. D'autre part, $x - \ln(x)$ et $2x - \ln(2x)$ sont toujours positives. On en déduit le tableau de variations de Φ :

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		↗		↘	

10. On sait que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant 1$. On en déduit, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{f(x)} \leqslant 1$.

D'autre part, $\dfrac{1}{f(x)}$ est toujours positive (par positivité de f).

On a donc

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{d}t$$

et donc $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

11. (a) Grâce au théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$. On en déduit qu'on peut prolonger Φ par continuité en 0 en posant $\Phi(0) = 0$.

(b) $\Phi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \sim_0 -\dfrac{\ln(x)}{\ln(x)\ln(2x)}$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{\ln(2x)} = 0$.

(c) Φ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de la limite de la dérivée pour en déduire que Φ est dérivable en 0 et $\Phi'(0) = 0$.

12. L'équation de la tangente en 0 est : $y = \Phi'(0)x + \Phi(0)$ c'est-à-dire $y = 0$. (on a donc une tangente horizontale).