MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°7 - 04/05/2024
(4h00, calculatrices interdites)

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Pensez à encadrer ou souligner vos résultats. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Le devoir comporte 4 pages. Il est composé de 2 exercices et 2 problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que :
$$\begin{aligned} &f(1,2,0,-3) = (1,2,-1,4), \quad f(0,1,-2,1) = (1,5,0,1), \\ &f(1,2,1,-2) = (0,-3,-1,3) \quad \text{et} \quad f(-1,0,-5,5) = (0,-6,-2,6). \end{aligned}$$
2. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $f(a,b,c,d)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (on précisera la dimension et une base pour chacun de ces sous-espaces).
4. Est-ce que f est injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$(1+x^2)y' - 3xy = 1. \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène (E_H) associée à (E).
2. Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
3. Montrer que, pour $x \to +\infty$, on a : $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x^3 + \dfrac{3}{2}x + o(1)$.
4. On pose $g : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^3 + x - \dfrac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$. Vérifier que g est l'unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.
5. Déterminer les variations de g. On précisera ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

PROBLÈME 1

Partie 1 : Étude d'une matrice et de l'application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de la matrice A (détailler).
2. Est-ce que A est inversible ? Si oui, déterminer son inverse (en détaillant la méthode choisie).
3. Calculer le déterminant de A.
4. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(x, y, z)$.
5. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Est-ce que f est injective ? sujective ? bijective ?

Partie 2 : trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

6. Montrer que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Montrer (en détail) que la matrice de f (rappel : f est définie à la partie 1) dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On note P la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$. Déterminer P.
9. On note P' la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Déterminer P'.
10. Déterminer une relation entre A, T, P et P'.

Partie 3 : Calcul des puissances de A

11. Déterminer la matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $T = D + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
12. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k.
13. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de T^n. On donnera chacun des coefficients de T^n.
14. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P'. Démontrer cette relation par récurrence.
15. Calculer A^n (on explicitera chacun de ses coefficients).

(Partie 4 à la page suivante)

Partie 4 : Étude de suites définies par récurrence

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n. \end{array}\right.$$

On note, pour $n \geqslant 0$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

16. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
17. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
18. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n seulement.

PROBLÈME 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie 1 : étude de la fonction

1. Dresser le tableau de variations de f, en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
   Étudier les éventuelles asymptotes et/ou branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
3. Déterminer $\displaystyle\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
   (b) Montrer : $b \in [2,4]$. On donne $\ln(2) \simeq 0{,}7$.

Partie 2 : étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.
6. Est-ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ? Si oui, préciser si elle est croissante ou décroissante.
7. Est-ce que (u_n) converge ? Si oui, préciser sa limite.

Partie 3 : étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

8. Montrer (rigoureusement !) que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))\,(2x - \ln(2x))}.$$
9. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.
10. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
11. (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
    (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Phi'(x)$.
    (c) En déduire que Φ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\Phi'(0)$.
12. On donne $\Phi(2) \simeq 1{,}1$ et on admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0{,}7$.
    Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ, ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.