MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°4 Concours Blanc 1 - 19/12/2024
(4h00, calculatrices interdites)

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Pensez à encadrer ou souligner vos résultats. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Le devoir comporte 4 *pages. Il est composé de* 3 *exercices indépendants et deux problèmes, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.*
Traitez chaque problème sur une (ou plusieurs) feuille à part!

EXERCICE 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z} = \dfrac{z^2 \cdot \overline{z} + \overline{z}}{\left|z^2\right|} = \dfrac{|z|^2 z + \overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|^2+1}{|z|^2}\operatorname{Re}(z) + i\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2}\operatorname{Im}(z)$ donc

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(f(z)\right) = \frac{|z|^2+1}{|z|^2}\cdot \operatorname{Re}(z)} \qquad \boxed{\operatorname{Im}\left(f(z)\right) = \frac{|z|^2-1}{|z|^2}\cdot \operatorname{Im}(z)}$$

(ou bien, en posant $z = a+ib$: $\operatorname{Re}\left(f(z)\right) = \dfrac{a^2+b^2+1}{a^2+b^2}\cdot a$ et $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2}\cdot b$)

2. $f(z) \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$ ou $\operatorname{Im}(z) = 0$
   $f(z) \in i\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) = 0$

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z) = 2\cos(\theta)$. Alors $f(z)$ est réel, donc on sait d'après la question précédente que $|z| = 1$ ou $\operatorname{Im}(z) = 0$.

   On fait une disjonction de cas :

   - Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, on en déduit que $a + \dfrac{1}{a} = 2\cos(\theta)$. Cette équation équivaut à l'équation : $a^2 - 2\cos(\theta)a + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 4\left(\cos^2(\theta) - 1\right) \leqslant 0$. Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ l'équation n'a donc pas de solutions réelles. Si $\theta \equiv 0\ [\pi]$ les solutions sont $a = 1$ et $a = -1$.
   - Si $|z| = 1$ alors il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\alpha}$.
     L'équation devient $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\theta)$
     Ou encore $2\cos(\alpha) = 2\cos(\theta)$ donc $\alpha \equiv \theta\ [2\pi]$ ou $\alpha \equiv -\theta\ [2\pi]$

   On peut donc conclure que $f(z) = 2\cos(\theta)$ si, et seulement si, $\boxed{z = e^{i\alpha}}$ avec $\boxed{\alpha \equiv \theta\ [2\pi]}$ ou $\boxed{\alpha \equiv -\theta\ [2\pi]}$ (cela marche aussi dans le cas où $\theta \equiv 0\ [2\pi]$)

4. (a) $\boxed{j^2-1} = e^{i\frac{4}{3}\pi} - 1 = e^{i\frac{2}{3}\pi}\left(e^{i\frac{2}{3}\pi} - e^{-i\frac{2}{3}\pi}\right) = e^{i\frac{2}{3}\pi}(2i)\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = 2\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)e^{i\frac{7}{6}\pi} = \boxed{\sqrt{3}e^{i\frac{7}{6}\pi}}$

   (b) $f(z) = 2j \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2jz + 1 = 0.$
   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4\left(j^2-1\right)$, donc une racine carrée de Δ est $s = 2\sqrt[4]{3}e^{i\frac{7}{12}\pi}$,
   donc les solutions sont : $z_1 = \dfrac{2j+s}{2}$ et $z_2 = \dfrac{2j-s}{2}$
   ou encore $\boxed{z_1 = j + \sqrt[4]{3}e^{i\frac{7}{12}\pi}}$ et $\boxed{z_2 = j - \sqrt[4]{3}e^{i\frac{7}{12}\pi}}$

EXERCICE 2

1. $\boxed{y' + 2y = 4e^x}$ $\quad (E)$

   On résout d'abord l'équation homogène : $y' + 2y = 0 \quad (E_H)$.

   La solution générale de (E_h) est de la forme : $y(x) = \lambda e^{-2x}$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

   On utilise ensuite la méthode de la variation de la constante pour déterminer les solutions de (E).

   On pose $y(x) = \lambda(x)e^{-2x}$. On dérive : $y'(x) = \lambda'(x)e^{-2x} - 2\lambda(x)e^{-2x}$.

   On remplace dans (E) et on obtient :

   $$\lambda' e^{-2x} - 2\lambda e^{-2x} + 2\lambda e^{-2x} = 4e^x \quad \Leftrightarrow \quad \lambda' = 4e^{3x}$$

   On peut prendre une primitive de λ' de la forme : $\lambda(x) = \dfrac{4e^{3x}}{3}$.

   Donc on conclut que une solution particulière de (E) est : $y_P(x) = \frac{4}{3}e^x$ et donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $\boxed{y(x) = \dfrac{4}{3}e^x + Ke^{-2x}}$ $\quad (K \in \mathbb{R})$

2. $\boxed{y'' - 5y' + 6 = (2x^2 - 4x + 1)e^x}$ $\quad (E)$.

   On résout d'abord l'équation homogène : $y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (E_h)$. Le discriminant de l'équation caractéristique est égal à 1 donc on a deux solutions : 2 et 3. La solution générale de l'équation homogène est donc de la forme :

   $$\boxed{y_g(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

   On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = u(x)e^x$. On dérive deux fois : $y'(x) = e^x(u + u')$ et $y''(x) = e^x(u'' + 2u' + u)$.

   On remplace dans (E) et on obtient :

   $$e^x(u'' + 2u' + u) - 5e^x(u + u') + 6ue^x = (2x^2 - 4x + 1)e^x \quad \Leftrightarrow \quad u'' - 3u' + 2u = 2x^2 - 4x + 1 \quad (*)$$

   On cherche u polynôme de second degré donc on pose $u(x) = Ax^2 + Bx + C$, $u'(x) = 2Ax + B$ et $u''(x) = 2A$.

   On remplace dans $(*)$ et on obtient :

   $$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 - 4x + 1$$

   Par identification on obtient le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 2A & = & 2 \\ & - & 6A & + & 2B & = & -4 \\ 2A & - & 3B & + & 2C & = & 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 1 \\ C & = & 1 \end{array}\right.$$

   On en déduit que $u(x) = x^2 + x + 1$ et $y(x) = \left(x^2 + x + 1\right)e^x$ est une solution particulière de (E).

   On conclut que les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme :

   $$\boxed{y(x) = (x^2 + x + 1)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. $\boxed{y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x}$ $\quad (E)$

   On résout d'abord l'équation homogène : $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (E_h)$. Le discriminant de l'équation caractéristique est égal à 0 donc on a une unique solution : 2.

La solution générale de l'équation homogène est donc de la forme : $\boxed{y_g(x) = e^{2x}(\lambda x + \mu)}$ $\quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On cherche une solution de la forme : $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. On dérive deux fois : $y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$, $y''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$.

On remplace dans (E) :

$$\begin{aligned} & -A\cos x - B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x + 4A\cos x + 4B\sin x = 7\sin x - \cos x \\ \Leftrightarrow \quad & (-A - 4B + 4A)\cos x + (-B + 4A + 4B)\sin x = 7\sin x - \cos x \end{aligned}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 3A - 4B = -1 \\ 3B + 4A = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Donc $y_P(x) = \cos(x) + \sin(x)$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que toutes les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{y(x) = \cos(x) + \sin(x) + e^{2x}(\lambda x + \mu)} \qquad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$$

EXERCICE 3

Pour tout $x \in [0, 3\pi]$, on pose $f(x) = x + \sin(x)$.
f est une fonction dérivable, par somme de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in [0, 3\pi], \quad f'(x) = 1 + \cos(x) \geqslant 0$$

donc f est croissante sur $[0, 3\pi]$.
De plus, $f(0) = 0$ et $f(3\pi) = 3\pi$.
Pour tout $x \in [0, 3\pi]$, on calcule $g(x) = f(x) - x = \sin(x)$.
On a donc le tableau suivant

x	0		π		2π		3π
f	0	$\nearrow$	π	$\nearrow$	2π	$\nearrow$	3π
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

On peut maintenant étudier la nature de la suite (u_n), suivant la valeur de u_0 :

- Si $u_0 \in]0, \pi[$. On remarque que $]0, \pi[$ est un intervalle stable et que f y est croissante donc (u_n) monotone. De plus, pour $x \in]0, \pi[$, $g(x) > 0$ donc (u_n) est une suite strictement croissante et majorée (par π).

  On en déduit que (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0, \pi]$.

  Par continuité de f, on sait que ℓ est un point fixe de f, donc $\ell \in \{0, \pi\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 < u_0 < u_n$. En passant à la limite on obtient $\ell \geqslant u_0 > 0$ donc on conclut que $\ell = \pi$.

  Si $u_0 \in]0, \pi[$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pi$.

- Si $u_0 \in]\pi, 2\pi[$. On remarque que $]\pi, 2\pi[$ est un intervalle stable et que f y est croissante donc (u_n) monotone. De plus, pour $x \in]\pi, 2\pi[$, $g(x) < 0$ donc (u_n) est une suite strictement décroissante et minorée (par π).

  On en déduit que (u_n) converge vers une limite $\ell \in [\pi, 2\pi]$.

  Par continuité de f, on sait que ℓ est un point fixe de f, donc $\ell \in \{\pi, 2\pi\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < u_0 < 2\pi$. En passant à la limite on obtient $\ell \leqslant u_0 < 2\pi$ donc on conclut que $\ell = \pi$.

  Si $u_0 \in]\pi, 2\pi[$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi$.

- Si $u_0 \in]2\pi, 3\pi[$. On remarque que $]2\pi, 3\pi[$ est un intervalle stable et que f y est croissante donc (u_n) monotone. De plus, pour $x \in]2\pi, 3\pi[$, $g(x) > 0$ donc (u_n) est une suite strictement croissante et majorée (par 3π).

  On en déduit que (u_n) converge vers une limite $\ell \in [2\pi, 3\pi]$.

  Par continuité de f, on sait que ℓ est un point fixe de f, donc $\ell \in \{2\pi, 3\pi\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\pi < u_0 < u_n$. En passant à la limite on obtient $\ell \geqslant u_0 > 2\pi$ donc on conclut que $\ell = 3\pi$.

  Si $u_0 \in]2\pi, 3\pi[$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3\pi$.

- **Enfin, si $u_0 \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$, alors la suite (u_n) est constante, donc convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.**

PROBLÈME 1

Partie I

1. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule jamais. La fonction ln est continue est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour $x > 0$ on a
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2\ln(x)}{x(1+x^2)^2}$$
Le dénominateur étant toujours positif (pour $x > 0$), on en déduit que f' est du même signe que g.

3. (a) g est une fonction dérivable par sommes et produits de fonctions dérivables, et
$$\forall x > 0, \quad g'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = -4x\ln(x)$$
On en déduit que $g' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]1, +\infty[$.
g est donc croissante sur $]0, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$.
On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, $g(1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

x	0		1		α		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$			
g	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

   (b) g est toujours strictement positive sur $]0, 1]$ donc elle ne s'y annule pas. D'autre part, comme g est continue et strictement monotone sur $[1, +\infty[$, le théorème de la bijection monotone nous permet d'en déduire que g induit une bijection de $[1, +\infty[$ dans $]-\infty, 2]$. En particulier, 0 possède un unique antécédent par g. C'est-à-dire, il existe un unique $\alpha \in [1, +\infty[$ $(\subset \mathbb{R}_+^*)$ tel que $g(\alpha) = 0$.

(c) $g(2) = 5 - 8\ln(2)$. Comme $\ln(2) > 0,69$ on a $8\ln 2 > 5,52$ donc $g(2) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (comme g continue et $g(1) > 0$), $\alpha \in]1,2[$.

(d) D'une part, $f(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{1+\alpha^2}$, d'autre part $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $1+\alpha^2 = 2\alpha^2 \ln\alpha$. On en déduit que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

4. On sait que f' a le même signe que g, on en déduit le tableau de variation de f.

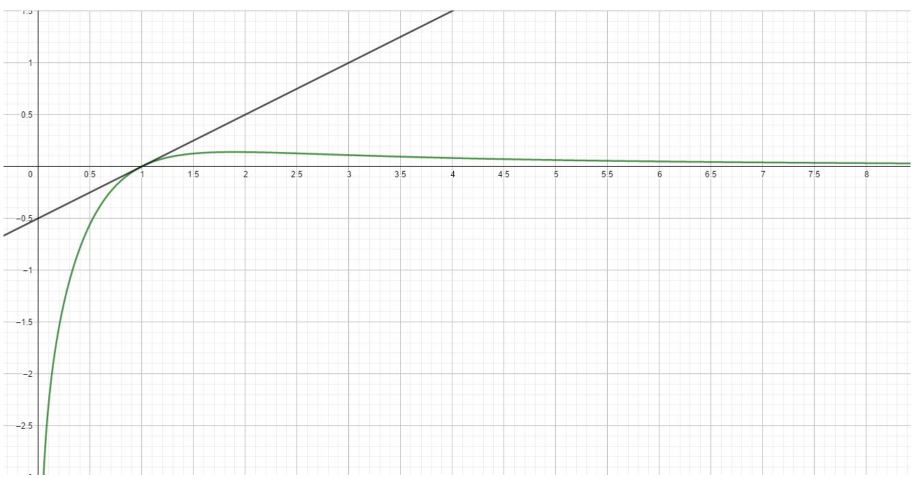
x	0		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 1+x^2 = 1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

On en déduit que f possède une asymptote verticale en 0, d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 0$.

5. On a $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$, donc l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



Partie II

7. (a) On sait que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle admet une primitive G de classe $\mathscr{C}^1$. Mais alors $F : x \mapsto G(x) - G(1)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par somme de fonctions $\mathscr{C}^1$, donc continue et dérivable.

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = G'(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

(b) On remarque que $f(1) = 0$ et $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$ et $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$. Comme le signe de F' est égal au signe de f on en déduit les variations de F : décroissante sur $]0,1[$ puis croissante. De plus, $F(1) = 0$, donc on en déduit que F est toujours positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. (a) On reconnaît que $\dfrac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}$ est le taux d'accroissement de la fonction arctan en 0.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}=\arctan'(0)=1$ (rappel : $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$)

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}=1$. Donc on peut prolonger φ par continuité en 0, en posant $\varphi(0)=1$.

(b) Pour $x>0$ on a

$$\begin{aligned}F(x)=\int_1^x \ln(t)\times\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t&=\left[\ln(t)\times\arctan(t)\right]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}\times\arctan(t)\,\mathrm{d}t\\&=\varphi(x)\times x\times\ln(x)-\int_1^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)x\ln(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)=0$ par croissances comparées. Et comme φ est continue sur $[0,1]$ alors elle y admet une primitive, donc $\lim\limits_{x\to 0}-\int_1^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. On peut donc prolonger par continuité F en 0 en posant $F(0)=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\times\left(\varphi(x)x\ln(x)-\int_1^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\varphi(x)x\ln(x)-\Phi(x)+\Phi(1)-\Phi(1)+\Phi(0)\right)\end{aligned}$$

où on a noté Φ une primitive de φ (Φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$). Mais alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\Phi(x)=\Phi(0)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln(x)\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$.

On en déduit que F n'est pas dérivable en 0 et que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

9. (a) On fait le changement de variable $u=\frac{1}{t}$ ($\mathrm{d}u=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=-u^2\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t=-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$)

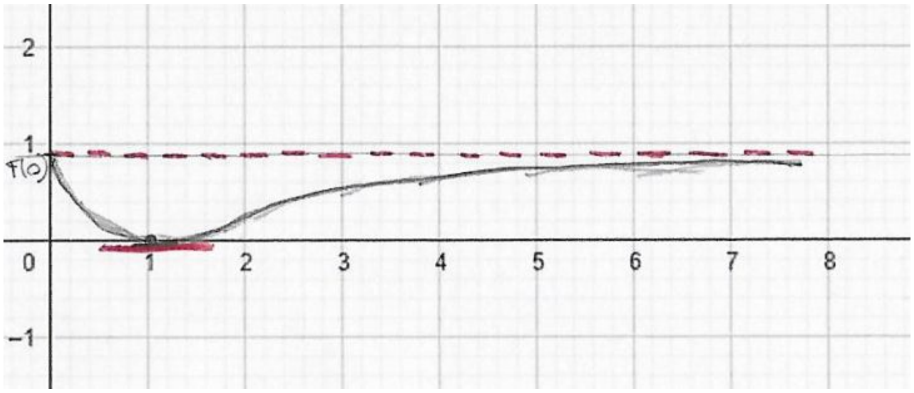
$$\begin{aligned}F(x)&=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_1^{1/x}f\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)\\&=\int_1^{1/x}\frac{\ln(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)\\&=\int_1^{1/x}\frac{(-\ln(u))u^2}{u^2+1}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)\\&=\int_1^{1/x}f(u)\,\mathrm{d}t\\&=F\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(\dfrac{1}{x}\right)=F(0)$.

On en déduit que la courbe représentative de F possède une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=F(0)$.

(c) On a $F(1) = 0$ et $F'(1) = f(1) = 0$ donc on aura une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

(d)



PROBLÈME 2

A. **Étude d'une fonction**

(1) On remarque tout d'abord que $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à l'origine.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a
$$f(-x) = -x \cdot \mathrm{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = -x \cdot \left(-\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$$
(car sh est une fonction impaire). Donc f est **paire**.

(2) (a)
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X}\mathrm{sh}(X) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X} \cdot \frac{e^X - e^{-X}}{2} = \lim_{X\to 0^+} \frac{e^X - 1}{2X} + \frac{e^{-X}-1}{-2X} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$
(on utilise $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$).
De même, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$ (car f paire).
f possède donc une asymptote horizontale (en $\pm\infty$) d'équation $y = 1$.

(b) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0+} x \cdot \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} \cdot \mathrm{sh}(X) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X - e^{-X}}{2X} = \boxed{+\infty}$ (par croissances comparées).
Comme f est paire, on aura aussi $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty}$.
f possède donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(3) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par produit et composition de fonctions dérivables. De plus
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right) \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

(4) Pour tout $x > 0$ on pose $g(x) = \mathrm{th}(x) - x$. g est dérivable par somme de fonctions dérivables et
$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} - 1 = \frac{1 - \mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$
Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{ch}^2(x) > 1$, donc on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, comme $g(0) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0$, $g(x) < 0$, c'est-à-dire, $\mathrm{th}(x) < x$.

(5)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
f	$1 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to\pm\infty} f(X) = 1$, donc on peut prolonger par continuité F en 0 en posant $\boxed{F(0) = 1}$
F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

B. **Une équation différentielle**

(6) Sur $]0,+\infty[$ (ou $]-\infty,0[$) l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$(E') \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{\mathrm{ch}(x)}{x}.$$

La solution générale de l'équation homogène sur $]0,+\infty[$ est

$$\boxed{y_h(x) = \lambda e^{-\ln|x|} = \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x},} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

On applique la méthode de la variation de la constante : on pose $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x}$, donc on a

$$y'(x) = \lambda(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \lambda'(x) \cdot \frac{1}{x}$$

puis on remplace dans (E') :

$$-\frac{\lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda'(x)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

On peut alors poser $\boxed{\lambda(x) = \mathrm{sh}(x)}$ pour obtenir $y_p(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ et donc la solution générale de l'équation (E) est

$$\boxed{y(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) + K_1}{x}, \quad K_1 \in \mathbb{R}}$$

(7) $y(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) + K_2}{x}, \quad K_2 \in \mathbb{R}$

(8) Soit G une solution de (E) définie sur tout $\mathbb{R}$. Alors G doit être continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus il doit exister deux constantes K, K' telles que

$$\forall x > 0,\ G(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) + K}{x}, \quad \text{et} \quad \forall x < 0,\ G(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) + K'}{x}.$$

Pour que G soit continue en 0 il faut en particulier qu'elle ait une limite finie en 0, et il est évident que $\lim\limits_{x \to 0^\pm} \dfrac{\mathrm{sh}(x) + K}{x}$ existe finie si et seulement si $K = 0$. On en déduit $K = K' = 0$ donc

$$\forall x \neq 0, \quad G(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = F(x)$$

puis on prolonge par continuité G en posant $G(0) = 1 = F(0)$ donc $F = G$. Enfin, on vérifie que F est bien une solution de (E) en 0 :

$$0 \cdot y'(0) + y(0) = \mathrm{ch}(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1.$$

C. Étude d'une suite

(8) f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc elle induit une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ (théorème de la bijection monotone). Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{n} > 1$, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n}$ admet un et un unique antécédent par f.

(9) On remarque que $f(u_n) = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Or comme $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$, on en déduit que $f(u_n) > f(u_{n+1})$ mais alors, comme f est strictement décroissante, $u_n < u_{n+1}$, donc (u_n) croissante.

(10) Supposons par absurde que (u_n) converge vers une limite finie $\ell \in]0,+\infty[$. Alors par passage à la limite dans $f(u_n) = \dfrac{n}{n+1}$ on obtiendrait $f(\ell) = 1$. Or il n'existe aucun $\ell \in]0,+\infty[$ tel que $f(\ell) = 1$, absurde. Donc comme (u_n) est croissante, on en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.

D. **Une fonction définie par une intégrale**

(11) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) = 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1 + 1 - e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x).$$

(12) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle y admet une primitive Φ (de classe $\mathscr{C}^1$).
On a alors $J(x) = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{x}{2}\right)$, donc J dérivable par somme et composition de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad J'(x) = \Phi'(x) - \frac{1}{2}\Phi'\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)}\right).$$

Or $\dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)} = \dfrac{\frac{x}{2} \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{2}{x}\right)}{x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\frac{x}{2} \cdot 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{x \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc on peut conclure

$$J'(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

(13) On a

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1/x} + e^{-1/x} \leqslant 4.$$

On pose $X = e^{1/x}$ et on obtient

$$X + \frac{1}{X} \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 4X + 1 \leqslant 0.$$

Cette équation a deux solutions : $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$. Donc

$$J'(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \sqrt{3} \leqslant e^{1/x} \leqslant 2 + \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln(2+\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}.$$

(on remarque $2 - \sqrt{3} < 0$).

(14)

x	0		$\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$		$+\infty$
$J'(x)$		$-$	0	$+$	
J	$+\infty$	$\searrow$	$J(1/\ln(2+\sqrt{3}))$	$\nearrow$	$+\infty$

(15)