MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°4 Concours Blanc 1 - 19/12/2024
(4h00, calculatrices interdites)

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Pensez à encadrer ou souligner vos résultats. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Le devoir comporte 4 *pages. Il est composé de* 3 *exercices indépendants et deux problèmes, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.*
Traitez chaque problème sur une (ou plusieurs) feuille à part!

Exercice 1

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$.
2. En déduire les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Puis les complexes z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.
3. Soit θ un réel. Déterminer tous les complexes z tels que $f(z) = 2\cos(\theta)$. On mettra les solutions sous forme exponentielle.
4. (a) On rappelle que $\boxed{j = e^{i\frac{2\pi}{3}}}$
   Mettre le complexe $j^2 - 1$ sous forme exponentielle.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 2j$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = 4e^x \quad$ (sur $\mathbb{R}$)
2. $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1)e^x \quad$ (sur $\mathbb{R}$)
3. $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x \quad$ (sur $\mathbb{R}$)

Exercice 3

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in [0, 3\pi]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \sin(u_n).$$

PROBLÈME 1

Partie I : étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

1. Justifier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$.
3. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ (notée α).
   (c) Montrer que $\alpha \in]1,2[$ (on pourra admettre que $\ln(2) > 0{,}69$).
   (d) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de f, déterminer les limites en 0 et $+\infty$ (on justifiera brièvement ces limites).
   Est-ce que f admet des droites asymptotes ? Lesquelles ?
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f (notée $\mathscr{C}_f$ par la suite) au point d'abscisse 1.
6. Représenter la courbe de f dans un repère.
   On tracera en particulier la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1

Partie II : étude d'une fonction intégrale

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).*

7. (a) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

8. (a) Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$.
   En déduire la limite de φ en 0^+. En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0.
   Dans la suite, la fonction φ est supposée prolongée.
   (b) Démontrer pour $x > 0$, que $F(x) = \varphi(x)x\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
   (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
   Dans la suite, la fonction F est supposée prolongée.
   (d) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\infty$.
   Que peut-on déduire pour F et pour la courbe représentative de F ?
9. (a) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale, démontrer que :
   $$\forall x > 0, \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right).$$
   (b) Étudier la limite de F en $+\infty$
   Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de F ?
   (c) Tracer l'allure de la courbe de F dans un repère (on admettra que $F(0) \simeq 0{,}92$).
   Précisez la tangente au point d'abscisse 1.

PROBLÈME 2

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.

A. **Étude d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(1) Étudier la parité de f.

(2) (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ (on pourra utiliser un changement de variable).

(b) Déterminer la limite de f en 0.

(3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

(4) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}(X) < X$.

(5) En déduire le tableau de variations de f.

(6) Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On admettra que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$.

B. **Une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \mathrm{ch}(x). \qquad (E)$$

(6) Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).

(7) Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

C. **Étude d'une suite**

(8) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

(9) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(10) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

D. **Une fonction définie par une intégrale**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(11) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$.

(12) Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

(13) En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$; on exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction ln.

(14) *On admet les résultats suivants :* *(voir page 4)*

- $\lim_{x\to 0^+} J(x) = +\infty$,
- $\lim_{x\to +\infty} J(x) = +\infty$ *et* J *admet au voisinage de* $+\infty$ *une asymptote d'équation* $y = \frac{x}{2}$,
- *la courbe représentative de* J *est toujours « au dessus »de l'asymptote précédente.*

Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.

(15) Tracer l'allure de la courbe représentative de J.

On donne pour le tracé : $\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0.76$ *et* $J\left(\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0.65$ *à* 10^{-2} *près.*