Méthodes et indications

EXERCICE 1

1. **NB :** On cherche un intervalle de confiance pour la moyenne m.

   On sait que $\dfrac{M_n - E(M_n)}{\sigma_{M_n}} = \dfrac{M_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$ (théorème centrale limite).

   $P\left(-t_\alpha \leq \dfrac{M_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t_\alpha\right) = 2\phi(t_\alpha) - 1$ et on veut ce dernier $= 1 - \alpha = 0,95$.

   Puis on se ramène à $P(\dots \leq m \leq \dots) = 0,95$, ce qui donne $m \in I$ avec I intervalle de confiance pour m au risque α.

2. **NB :** Si $I = [a, b]$ alors son amplitude est $b - a$.

EXERCICE 2

Si l'intervalle de confiance est $[a, b]$, si $a > 150$ on peut considérer que le remède est efficace. Sinon non.

EXERCICE 3

NB : On cherche un intervalle de confiance pour une proportion.

NB : $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$ ($X_i = 1$ si la personne $i$ème fume plus d'un paquet, 0 sinon).
Ici $\sigma = \sqrt{pq}$ dépend de p paramètre à estimer. On a deux méthodes :

1. $p \approx 0,2$ (car 20% est l'estimation de p) d'où $\sigma \approx \sqrt{0,2 \times 0,8}$ puis on utilise la même méthode qu'aux exercices précedents. (inconvenient : "à peu près", avantage : IC précis).
2. $0 \leq pq \leq \frac{1}{4}$ (étude de $x \to x(1-x)$ sur $[0,1]$) d'où $P\left(M_n - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \leq p \leq M_n + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right) \geq P\left(M_n - \dfrac{\sigma t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq p \leq M_n + \dfrac{\sigma t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$ (inconvenient : IC peu prècis, avantage : on est sûr).

$M'_n = \dfrac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$, $Y_i = 1$ si le $i$ème individu est un fumeur, 0 sinon. $Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1\,;\,0,6)$.
Risque $= 1 - P(0,5 \leq M_n \leq 0,7)$ (centrer, réduire, etc..)
(ici $p = 0,6$ est connu, σ l'est donc aussi).

EXERCICE 4

1. Existence : trouver un L_j : q_k ($k \neq j$) sont racines de L_j, donc $L_j = \prod_{k \neq j} (X - q_k) Q$, mais $d(L_j) \leq m$ d'où $Q = \lambda$ (constante).

   $L_j(q_j) = 1$ d'où $1 = \dots$, $\lambda = \dots$, $L_j = \prod_{k \neq j} \left(\dfrac{X - q_k}{q_j - q_k}\right)$

   Unicité : soient L_j et M_j tels que ... montrer que $L_j = M_j$.

   NB : Montrer que $f = g \Leftrightarrow$ montrer que $f - g = 0$.

NB : Pour montrer que $P = 0$ (où P polynôme)

- Montrer que P a une infinité de racines.
- Montrer que P a $n+1$ racines (où $n = \mathrm{d}(P)$).

Remarque : le raisonnement précedent (cf. existence) permet de justifier aussi l'unicité, mais il est sans doute plus simple de ne pas rédiger ce raisonnement sur une copie (écrire seulement $L_j = \prod_{k\neq j}\left(\frac{X-q_k}{q_j-q_k}\right)$ convient) et de traiter l'unicité séparément.

2. Liberté : soient $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que … $X = q_j$ donne …

3. **NB :** Soit $x \in E$. Donner l'expression de x dans la base $(e_1, \dots e_n)$: $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n$ (et même $\exists !$) car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base.
$\to$ trouver l'expression des λ_i.

Même idée que dans 2. $X = q_j$ donne … donc $\lambda_j = \dots$

EXERCICE 5

NB : $p \in \mathscr{L}(E)$ projecteur si $p^2 = p$.
$E = F \oplus G$ avec $F = \mathrm{Ker}\, p$, $G = \mathrm{Im}\, p$.
On dit "p projecteur sur G parallèlement à F".
On a $\forall x \in E$, $\exists !(x_0, x_1) \in F \times G$ tel que $x = x_0 + x_1$; $p(x) = p(x_1) = x_1$.

$\mathrm{Spec}(u) = \{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ et u est diagonalisable, donc $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.

Prendre les p_j projecteurs sur E_j parallèlement à $\bigoplus_{i\neq j} E_i$.

EXERCICE 6

2. **NB :** Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$: montrer que u est linéaire <u>et</u> que $\forall x \in E,\ u(x) \in E$.

Montrer que $\mathrm{d}(P(X) - P(X+1)) \leq n-1$. $P(X) = a_n X^n + \dots$ (termes de degré $\leq n-1$). Puis regarder les coefficients de X^n.

Exercices corrigés

EXERCICE 1

On a les données suivantes :

- X =poids des alevins
- $\sigma = \sqrt{V(X)} = 3$g
- $n = 45$
- $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_{45}}{45} = 8,24$g.

1. $P(-t \leq (M_n)^* \leq t) = 0,95 \Leftrightarrow 2\phi(t) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \phi(t) = \dfrac{1,95}{2} = 0,975 \Leftrightarrow t = 1,96.$

   $P\left(-t \leq \dfrac{M_n - n}{\sigma}\sqrt{n} \leq t\right) = 0,95$

   $\Leftrightarrow P\left(\dfrac{-1,96\sigma}{\sqrt{45}} \leq M_n - m \leq \dfrac{1,96\sigma}{\sqrt{45}}\right) = 0,95$

   $\Leftrightarrow P\left(M_n - \dfrac{1,96\sigma}{\sqrt{45}} \leq m \leq M_n + \dfrac{1,96\sigma}{\sqrt{45}}\right) = 0,95$

   Donc $I = \left[8,24 - \dfrac{1,96 \cdot 3}{3\sqrt{5}}\ ;\ 8,24 + \dfrac{1,96 \cdot 3}{3\sqrt{5}}\right] = \left[8,24 - \dfrac{1,96}{\sqrt{5}}\ ;\ 8,24 + \dfrac{1,96}{\sqrt{5}}\right]$

2. L'amplitude est égale à $2 \times \dfrac{1,96\sigma}{\sqrt{n}}$.

   Donc amplitude$\approx 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 1,96 \cdot 3 \approx \sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} \approx 6 \cdot 1,96$ mais $12 \approx 6 \cdot 1,96$ donc $\sqrt{n} \approx 12$ convient donc $n \approx 144$.

EXERCICE 2

On a les données suivantes :

- X =durée de vie des arbustes (jours)
- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(150, 36)$
- $n = 81$
- $M_n = 158$
- $\sigma = 36$.

1. $P\left(-t \leq \dfrac{M_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \leq t\right) = 0,95 \Leftrightarrow t = 1,96$ (voir exercice précedant).

   $P\left(M_n - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq M_n + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$

   L'intervalle de confiance au risque de 5% est

   $I_1 = \left[158 - \dfrac{1,96 \cdot 36}{\sqrt{81}}\ ;\ 158 + \dfrac{1,96 \cdot 36}{\sqrt{81}}\right] = [158 - 1,96 \cdot 4\ ;\ 158 + 1,96 \cdot 4]$ or $158 - 1,96 \cdot 4 > 150$ donc le remède est efficace à 5% de risque.

2. $P\left(-t \leq \dfrac{M_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \leq t\right) = 0,99 \Leftrightarrow 2\phi(t) - 1 = 0,99 \Leftrightarrow \phi(t) = \dfrac{1,99}{2} = 0,995 \Leftrightarrow t = 2,58$

   donc l'intervalle de confiance au risque de 1% est

   $I_2 = [158 - 2,58 \cdot 4\ ;\ 158 + 2,58 \cdot 4]$. Or $158 - 2,58 \cdot 4 < 150$ donc on ne peut pas dire que le remède est efficace au risque de 1%.

EXERCICE 3

On a les données suivantes :

- $n = 100$
- 20% des personnes fument plus d'un paquet par jour
- $X_i = 1$ si et seulement si la personne $i$ème fume plus d'un paquet (0 sinon)
- $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1\,;\,0,2)$.
- $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$
- $M_n = 0,20$
- $V(X_i) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$.
- $M_n = 0,20$

1. $P(-t \leq (M_n)^* \leq t) = 0,95 \Leftrightarrow 2\phi(t) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \phi(t) = \dfrac{1,95}{2} = 0,975 \Leftrightarrow t = 1,96 \simeq 2.$

   $P\left(-t \leq \dfrac{0,20 - m}{\sigma}\sqrt{100} \leq t\right) = 0,95$

   $P\left(0,20 - \dfrac{t\sigma}{10} \leq m \leq 0,20 + \dfrac{t\sigma}{10}\right) = 0,95$

   $P\left(0,20 - \dfrac{0,4 \cdot 2}{10} \leq m \leq 0,20 + 0,08\right) = 0,95$

   Alors $I_c = [0,12; 0,28]$.

2. Ici $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1\,;\,0,6)$ et on cherche la probabilité $P = P\left(-t \leq M_n^* \leq t\right)$

   Or $P = P\left(-t \leq \dfrac{M_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \leq t\right) = P\left(m - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} \leq M_n \leq \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} + m\right)$.

   Or $m - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 0,5$ et $\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} + m = 0,7$ donc en sachant que $m = 0,6$ on déduit que $\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 0,1$ donc $t = \dfrac{10}{2\sqrt{6}}$

   Donc $P = 2\phi\left(\dfrac{10}{2\sqrt{6}}\right) - 1$

   Et donc le risque de perdre le pari est $1 - P = 2\left(1 - \phi\left(\dfrac{10}{2\sqrt{6}}\right)\right)$.

EXERCICE 4

1. Pour tout $j \in [\![0, m]\!]$ soit $L_j = \displaystyle\prod_{i \neq j}\left(\frac{(X - q_i)}{(q_j - q_i)}\right) = \frac{(X - q_0)\ldots(X - q_{j-1})(X - q_{j+1})\ldots(X - q_m)}{(q_j - q_0)\ldots(q_j - q_{j-1})(q_j - q_{j+1})\ldots(q_j - q_m)}$.

   L_j possède bien les propriétés réquises.

   Montrons son unicité : soit $M_j \in \mathbb{R}_m[X]$ un autre polynôme de degré m tel que $L_j(q_j) = 1$ et $L_j(q_i) = 0\ \forall i \neq j$.

   Alors $L_j(q_k) = M_j(q_k)\ \forall k \in [\![0, m]\!]$, mais alors $L_j - M_j$ est un polynôme de degré $\leq m$ ayant $m+1$ racines, donc $L_j - M_j = 0$ et donc $L_j = M_j$ ce qui prouve l'unicité.

2. Montrons que $(L_0, \ldots, L_m)$ est une famille libre.

   Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 L_0(X) + \cdots + \lambda_m L_m(X) = 0$.

   En remplaçant $X = q_0$ on obtient $\lambda_0 \cdot 1 = 0$, donc $\lambda_0 = 0$, ..., en remplaçant $X = q_m$ on obtient $\lambda_m = 0$, donc

   $\lambda_0 = \cdots = \lambda_m = 0$. Donc $(L_0, \ldots, L_m)$ est bien une famille libre de $m+1$ éléments $(= \dim(\mathbb{R}_m[X]))$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

3. Soit $P(X) = \lambda_0 L_0(X) + \cdots + \lambda_m L_m(X)$.

   Pour tout $j \in [\![0, m]\!]$ on calcule $P(q_j) = a_j$ alors $\lambda_j \cdot 1 = a_j$ donc $\lambda_j = P(q_j)$.

4. Soit $P \in \mathscr{E}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{R}_m[X]$ alors $P = \lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_m L_m$, où les L_i ont été définis à partis d'un sous-ensemble de $m+1$ éléments $\{q_0, \dots, q_m\}$ quelconques de $\mathbb{Q}$.

   Alors $\forall i \in [\![0, m]\!]$, $L_i \in \mathbb{Q}[X]$, mais alors $\forall i \in [\![0, m]\!]$, $\lambda_i = P(q_i) \in \mathbb{Q}$ et donc $P \in \mathbb{Q}[X]$. Donc $\mathscr{E} \subset \mathbb{Q}[X]$.

   D'autre part si $P \in \mathbb{Q}[X]$ alors $\forall q \in \mathbb{Q}$, $P(q) \in \mathbb{Q}$, donc $P \in \mathscr{E}$. Donc $\mathscr{E} = \mathbb{Q}[X]$.

EXERCICE 5

Spec$u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et u diagonalisable donc $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.

On définit p_j comme le projecteur sur E_j parallèlement à $\bigoplus_{i \neq j} E_i$.

Soit $x \in E$ alors $\exists (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_k$.
$\forall i \neq j\ p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j) = 0$ car $x_j \in \mathrm{Ker} p_i = \bigoplus_{k \neq i} E_i$.
$p_1(x) + \cdots + p_k(x) = x_1 + \cdots + x_k = x = \mathrm{Id}_E(x)$.
$u(x) = u(x_1) + \cdots + u(x_k) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = \lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_k p_k(x)$.

EXERCICE 6

1. Montrons que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$.

   $0 \in E_n$.

   Soient $P, Q \in E_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $P + \lambda Q \in E_n$ car $(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0$.

   $\mathscr{B} = \{X, X^2, \dots X^n\}$ est une base pour E_n, donc sa dimension est n.

2. Soit $P \in E_n$, alors $P(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \dots a_n X^n$.

   $u(P) = X(a_1 X + \cdots + a_n X^n - a_1(X+1) - \cdots - a_n(X+1)^n) = X(a_1(-1) + a_2(-2X-1) + \cdots + a_n(-nX^{n-1} + \dots))$ donc

   $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(u(P))(0) = 0$, ce qui prouve que $u(P) \in E_n$.

   On calcule :

   - $u(X) = X(-1) = -X$
   - $u(X^2) X(-2X-1) = -2X^2 - X$
   - $u(X^3) = X(-3X^2 - 3X - 1) = -3X^3 - 3X^2 - X$
   - $\dots$

   Donc la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -C_n^0 \\ 0 & -2 & -3 & \dots & -C_n^1 \\ 0 & 0 & -3 & \dots & -C_n^2 \\ & & & \ddots & \\ & & & -(n-1) & -C_n^{n-1} \\ & & & & -n \end{pmatrix}$$

   où $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le coefficient binomial.

   On remarque que cette matrice a rang n (matrice triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux non nuls) donc elle est inversible. u est donc une bijection.

3. Si $R(0) = 0$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $R \in E_n$. Alors $P = u^{-1}(R)$ est le polynôme cherché.

   D'autre part si $R = X(P(X) - P(X+1))$ alors $R(0) = 0$.