

Méthodes et indications

EXERCICE 1

Formule des probabilités totales $((Y = 1), (Y = -1))$.

EXERCICE 2

NB : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $Y = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

NB : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\phi : x \rightarrow F_X(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

EXERCICE 4

On écrit $-x^2 + 4x + 2 = -\frac{1}{2}(ax + \beta)^2 + \gamma$, puis on fait le changement de variable défini par $u = ax + \beta$

EXERCICE 5

1. $p(\Omega) = \{p_0, p_0 - \Delta\}$. $P(p = p_0) = ? \dots E(p) = ?$
2. Linéarité de l'espérance (la loi de c est inutile).
3. (b) Considérer deux cas : si $G'(250) \leq 0$ et si $G'(250) > 0 \dots$
4. $G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = ?$

Exercices corrigés

EXERCICE 1

Tout d'abord on remarque que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $Y(\Omega) = \{1, -1\}$, donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}$.

Ensuite on calcule la fonction de répartition de Z : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y = 1\}) + P(\{-X \leq x\} \cap \{Y = -1\})$ (car $\{Y = 1\}, \{Y = -1\}$ est un système complet d'événements, donc on peut appliquer la formule des probabilités totales).

Donc $F_Z(x) = \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}(1 - P(X \leq -x))$ (indépendance de X et Y)

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(F_X(x) - F_X(-x)).$$

En dérivant on obtient

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}(f_X(x) + f_X(-x)) = f_X(x) \quad (\text{car } f_X \text{ paire}).$$

Donc Z suit la même loi que X , i.e. $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

EXERCICE 2

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $Y = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On obtient donc $P(X \leq 3) = P\left(Y \leq \frac{3 - m}{\sigma}\right) = 0,1587$ et $P(X \leq 9) = P\left(Y \leq \frac{9 - m}{\sigma}\right) = 0,9772$.

En regardant le tableau de valeurs de ϕ on trouve $\phi(1) = F_Y(1) = P(Y \leq 1) = 0,8413$ donc $\phi(-1) = P(Y \leq -1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$ et $\phi(2) = P(Y \leq 2) = 0,9772$.

Comme ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$ on peut donc conclure :

$\frac{3 - m}{\sigma} = -1$ et $\frac{9 - m}{\sigma} = 2$. En résolvant le système de ces deux équations on obtient $m = 5$ et $\sigma = 2$.

EXERCICE 3

On calcule le discriminant du polynôme : $\Delta = A^2 - 4$. Donc

$$P(A^2 - 4 \geq 0) = 1 - P(A^2 - 4 \leq 0) = 1 - P(A^2 \leq 4) = 1 - P(-2 \leq A \leq 2).$$

Comme $A \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 2^2)$ alors $B = \frac{A - 3}{2}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On obtient donc $1 - P(-2 \leq A \leq 2) = 1 - P\left(-\frac{5}{2} \leq B \leq -\frac{1}{2}\right) = 1 - \phi(-0,5) + \phi(-2,5) = \phi(0,5) + (1 - \phi(2,5)) = 0,69767$.

EXERCICE 4

On écrit $-x^2 + 4x + 2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}x - 2\sqrt{2})^2 + 6$.

Alors grâce au changement de variable donné par $u = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$ on obtient

$$\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}u^2 + 6} \frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^6 \cdot \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{\pi} e^6 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{\pi} \cdot e^6 \cdot (\phi(2) - \phi(0)) = \sqrt{\pi} \cdot e^6 \cdot \left(\phi(2) - \frac{1}{2}\right).$$

EXERCICE 5

1. p est une var discrète et $p(\Omega) = \{p_0, p_0 - \Delta\}$, donc

$$E(p) = P(X > 230)p_0 + P(X \leq 230)(p_0 - \Delta) = p_0 - P(X \leq 230)\Delta = p_0 - P\left(\frac{X - m_l}{\sigma} \leq \frac{230 - m_l}{\sigma}\right)\Delta = p_0 - \phi\left(\frac{230 - m_l}{\sigma}\right)\Delta.$$

2. Par linéarité de l'espérance : $E(c) = c_0 + E(X)c_1 = c_0 + m_l c_1$.

3. (a) $B(\omega) = p(\omega) - c(\omega)$.

Donc $E(B) = E(p) - E(c) = p_0 - \phi\left(\frac{230 - m_l}{\sigma}\right)\Delta - c_0 - m_l c_1$ et donc

$$G(x) = p_0 - \phi\left(\frac{230 - x}{\sigma}\right)\Delta - c_0 - c_1 x.$$

$$(b) \quad G'(x) = \varphi\left(\frac{230 - x}{\sigma}\right) \cdot \frac{\Delta}{\sigma} - c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{230 - x}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{\Delta}{\sigma} - c_1.$$

Or, l'application $x \rightarrow \left(\frac{x - 230}{\sigma}\right)^2$ est croissante sur $[250, +\infty[$

donc G' est décroissante sur $[250, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G'(x) = -c_1 < 0$.

– Premier cas : si $G'(250) \leq 0$ on obtient le tableau de variations suivant :

x	250	$+\infty$
G'	$(\leq 0) \longrightarrow (< 0)$	
G	$\longrightarrow$	

– Deuxième cas : si $G'(250) > 0$ on obtient le tableau de variations suivant :

x	250	α	$+\infty$
G'	$(> 0) \longrightarrow 0 \longrightarrow (< 0)$		
G	$\longrightarrow G(\alpha) \longrightarrow$		

4. On cherche α tel que $G'(\alpha) = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{230-\alpha}{\sigma}\right)^2} \frac{\Delta}{\sigma} - c_1 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (230 - \alpha)^2 = 2\sigma^2 \left(\frac{\Delta}{c_1 \sqrt{2\pi}\sigma} \right) \Leftrightarrow 230 - \alpha = \pm \sqrt{2\sigma^2 \left(\frac{\Delta}{c_1 \sqrt{2\pi}\sigma} \right)}$$

Donc on trouve $\alpha = 230 \pm 26,12$, mais $\alpha \geq 250$ donc $\alpha = 256,12$.

EXERCICE 6

$$1. G(s) = P(X \leq s \mid X \geq 120) = \frac{P(\{X \geq s\} \cap \{X \geq 120\})}{P(X \geq 120)}.$$

Si $s < 120$, $G(s) = 0$.

Pour $s \geq 120$:

$$G(s) = \frac{P(120 \leq X \leq s)}{P(X \geq 120)} = \frac{P\left(2 \leq \frac{X-100}{10} \leq \frac{s-100}{10}\right)}{P\left(\frac{X-100}{10} \geq 2\right)} = \frac{\phi\left(\frac{s-100}{10}\right) - \phi(2)}{1 - \phi(2)}.$$

$$2. \text{ Pour tout } s \in \mathbb{R} \quad f_{X|X \geq 120}(s) = G'(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{s-100}{10}\right)}{1 - \phi(2)} = \frac{1}{10(1 - \phi(2))} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-100}{10}\right)^2} \mathbb{1}_{[120, +\infty[}(s).$$

$$\text{Donc } E(X \mid X \geq 120) = \frac{1}{10(1 - \phi(2))} \int_{120}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot s \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-100}{10}\right)^2} ds.$$

On fait le changement de variable $u = \frac{s-100}{10}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \phi(2)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (10u + 100) e^{-\frac{1}{2}u^2} du &= \frac{1}{1 - \phi(2)} \cdot \left(\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 10u e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 100 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right) \\ &= \frac{1}{1 - \phi(2)} \left(\frac{10}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{1}{2}u^2} \right]_2^{+\infty} + 100(1 - \phi(2)) \right) = \frac{1}{1 - \phi(2)} \cdot \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2} + 100. \end{aligned}$$

3. De la même manière, dans le cas général on trouve

$$f_{X|X \geq x_p}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}{1 - \phi\left(\frac{x_p-m}{\sigma}\right)} \cdot \mathbb{1}_{[x_p, +\infty[}(x).$$

Et donc

$$E(X \mid X \geq x_p) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{1 - \phi\left(\frac{x_p-m}{\sigma}\right)} \cdot \int_{x_p}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \dots = m + \frac{1}{1 - \phi\left(\frac{x_p-m}{\sigma}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_p-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Et donc

$$i_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \phi\left(\frac{x_p-m}{\sigma}\right)\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_p-m}{\sigma}\right)^2}.$$