EXERCICE 1

1. Si $g \in H$ est telle que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$ alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $g(x,y) = h(y)$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

2. Soient $f, g \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\varphi_1(f+\lambda g) = \frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial x} - a(f+\lambda g) = \frac{\partial f}{\partial x} - af + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x} - ag\right) = \varphi_1(f) + \lambda \varphi_1(g).$$

$$\text{et} \quad \varphi_2(f+\lambda g) = \frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial y} - b(f+\lambda g) = \frac{\partial f}{\partial y} - bf + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} - bg\right) = \varphi_2(f) + \lambda \varphi_2(g),$$

donc φ_1 et φ_2 sont deux applications linéaires.

On remarque que on peut écrire toute fonction $f \in H$ sous la forme $f(x,y) = e^{ax} g(x,y)$ avec $g \in H$. En effet $f(x,y) = e^{ax}\left(e^{-ax} f(x,y)\right)$ et $e^{ax} \in H$ et $e^{-ax} f(x,y) \in H$. (De la même manière on peut écrire $f(x,y) = e^{bx} h(x,y)$ ou encore $f(x,y) = e^{ax+bx} k(x,y)$). Avec cette notation, on a

$$\varphi_1(f) = a e^{ax} g + e^{ax} \frac{\partial g}{\partial x} - a e^{ax} g = e^{ax} \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_2(f) = e^{by} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Donc $\varphi_1(f) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = g_1(y),\ g_1 \in H$ de classe $\mathscr{C}^2 \Leftrightarrow f(x,y) = e^{ax} g_1(y)$

et $\varphi_2(f) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = g_2(x),\ g_2 \in H$ de classe $\mathscr{C}^2 \Leftrightarrow f(x,y) = e^{bx} g_2(x)$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \left\{f \in H \mid f = e^{ax} g_1(y), g_1 \in H\right\}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \left\{f \in H \mid f = e^{by} g_2(x), g_2 \in H\right\}$.

φ_1 et φ_2 ne sont pas des endomorphismes, car les dérivées partielles d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ ne sont pas forcément de classe $\mathscr{C}^2$.

3. $\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) = \left\{f \in H \mid f = e^{ax} g_1(y) = e^{by} g_2(x)\right\} = \left\{f \in H \mid f(x,y) = k e^{ax} e^{by}, k \in \mathbb{R}\right\}$.

4. Soit $f \in H$ telle que $\varphi_1(f) = A$ et $\varphi_2(f) = B$. Alors

$$\varphi_2(A) = \varphi_2(\varphi_1(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y} - b\frac{\partial f}{\partial x} - abf$$

$$\text{et} \quad \varphi_1(B) = \varphi_1(\varphi_2(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - b\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y} - abf$$

et, comme par hypothèse sur H les dérivées partielles secondes sont continues, par le théorème de Schwarz on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

donc $\varphi_2(A) = \varphi_1(B)$.

5. Comme A ne dépend que de x et B ne dépend que de y on a

$$\varphi_2(A) = -bA \quad \text{et} \quad \varphi_1(B) = -aB$$

or, grâce à la question précedente, on sait que $\varphi_2(A) = \varphi_1(B)$ donc $-bA = -aB$ et comme A ne dépend que de x et B ne dépend que de y cette égalité implique forcément qu'elles sont constantes. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A(x,y) = -\dfrac{\lambda}{b}$ et $B(x,y) = -\dfrac{\lambda}{a}$.

Ensuite, on pose $f(x,y) = e^{ax+by} g(x,y)$ et en appliquant φ_1 et φ_2 on obtient

$$e^{ax+by} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\lambda}{b} \quad \text{et} \quad e^{ax+by} \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\lambda}{a}.$$

Grâce à la première de ces équations on déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -e^{-x-by}\dfrac{\lambda}{b}$ et donc en intégrant par rapport à x, $g(x,y) = \dfrac{\lambda}{ab}e^{-ax-by} + h(y)$ d'autre part, grâce à la deuxième équation on obtient $g(x,y) = \dfrac{\lambda}{ab}e^{-ax-by} + k(x)$ donc $k(x) = h(y) = \mu \in \mathbb{R}$ et $g(x,y) = \dfrac{\lambda}{ab}e^{-ax-by} + \mu$. En remplaçant cela dans la formule de $f(x,y)$ on obtient

$$f(x,y) = \frac{\lambda}{ab} + \mu e^{ax+by}.$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ f \in H \mid f(x,y) = \frac{\lambda}{ab} + \mu e^{ax+by},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

EXERCICE 2

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Donc

$$\left|f(x,y)\right| \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = x^2+y^2 \to 0, \text{ pour } (x,y) \to (0,0),$$

donc f est continue en $(0,0)$.

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y^3 + y^5 - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + 3xy^4 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(en $(0,0)$ les deux dérivées partielles sont nulles).

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^3(y^2-x^2) = 0 \\ xy^2(3x^2+y^2) = 0 \end{array} \right.$$

On cherche les solutions de $y^3(y^2-x^2) = 0$.

- Premier cas : $y = 0$ et x quelconque : les deux dérivées partielles s'annulent, donc $(x,0)$ est un point critique pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas un extremum, car $f(x,0) = 0$, mais $f(x+h,k)$ peut être strictement positif ou négatif, selon le choix de h et k (dans un voisinage de $(0,0)$ aussi petit qu'on veut).
- Deuxième cas : $y^2 = x^2$, avec $y \neq 0$ et donc $x \neq 0$: la deuxième dérivée partielle ne s'annule pas.

3. Les dérivées partielles sont bien continues en $(0,0)$ (elles sont majorées par $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ pour $(x,y) \to (0,0)$) donc la fonction f est dérivable.

   La différentielle de f en $(0,0)$ est l'application $d_{(0,0)}f : (h,k) \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k$ donc $d_{(0,0)}f$ est l'application nulle.

4. On calcule les dérivées secondes partielles en $(0,0)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$$

donc les dérivées partielles secondes ne sont pas égales en $(0,0)$. Cela contredit le théorème de Schwarz, donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 3

1. $P(N=1)=0$.

   $\forall n\geq 1\ P(N>n)=p_1^n+p_2^n+p_3^n$ (on a tiré trois boules rouges, ou vertes, ou jaunes, les événements sont indépendants).

   Donc $\forall n\geq 2$, $P(N=n)=P(N\leq n)-P(N\leq n-1)=1-P(N>n)-1+P(N>n-1)=p_1^{n-1}+p_2^{n-1}+p_3^{n-1}-p_1^n-p_2^n-p_3^n=p_1^{n-1}(1-p_1)+p_2^{n-1}(1-p_2)+p_3^{n-1}(1-p_3)$.

2. $\lim_{n\to+\infty}k^2\cdot kp^{k-1}=0$ car $|p|<1$ (croissances comparées), donc la série converge par le critère de Riemann.

   Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}kp^{k-1}=f'(p)$ où $f(p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}p^k=\frac{1-p^{N+1}}{1-p}$. Donc $f'(p)=\dfrac{-(N+1)p^N(1-p)+1-p^{N+1}}{(1-p)^2}\to\dfrac{1}{(1-p)^2}$ quand $N\to+\infty$. Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}kp^{k-1}=\frac{1}{(1-p)^2}-1$.

3. $E(N)=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}kp_1^{k-1}(1-p_1)+\sum_{k=2}^{+\infty}kp_2^{k-1}(1-p_2)+\sum_{k=2}^{+\infty}kp_3^{k-1}(1-p_3)=\frac{1}{1-p_1}+\frac{1}{1-p_2}+\frac{1}{1-p_3}-(1-p_1+1-p_2+1-p_3)$

   $=\dfrac{1}{1-p_1}+\dfrac{1}{1-p_2}+\dfrac{1}{1-p_3}-2$ (car $p_1+p_2+p_3=1$).

4. (a) On va appliquer le théorème des extrema liés : on cherche un minimum de $f(p_1,p_2,p_3)$ sur $V=\left\{(p_1,p_2,p_3)\in[0,1[^3|\ p_1+p_2+p_3=1\right\}$. On obtient le système

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(1-p_1)^2}=\lambda\\[2ex]\dfrac{1}{(1-p_2)^2}=\lambda\\[2ex]\dfrac{1}{(1-p_3)^2}=\lambda\end{cases}$$

   Donc $\dfrac{1}{(1-p_1)^2}=\dfrac{1}{(p_2-1)^2}=\dfrac{1}{(1-p_3)^2}$ mais alors $1-p_1^2=1-p_2^2=1-p_3^2$ et enfin $p_1^2=p_2^2=p_3^2$ mais $p_1,p_2,p_3\geq 0$ donc $p_1=p_2=p_3$ et $p_1+p_2+p_3=1$ donc $p_1=p_2=p_3=\dfrac{1}{3}$.

   $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ est donc l'unique point susceptible d'être un extrema.

   (b) On étudie le signe de

$$d=f(p_1,p_2,p_3)-f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{1-p_1}+\frac{1}{1-p_2}+\frac{1}{1-p_3}-2-\frac{9}{2}+2=\frac{1}{1-p_1}+\frac{1}{1-p_2}+\frac{1}{p_1+p_2}-\frac{9}{2}$$

$$=\frac{(p_1+p_2)(1-p_2)+(p_1+p_2)(1-p_1)+(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)(p_1+p_2)}-\frac{9}{2}$$

$$=\frac{p_1-p_1p_2+p_2-p_2^2+p_1-p_1^2+p_2-p_1p_2+1-p_1-p_2+p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)(p_1+p_2)}-\frac{9}{2}$$

$$=\frac{2(-p_1^2-p_2^2-p_1p_2+p_1+p_2+1)-9(p_1+p_2-2p_1p_2-p_1^2-p_2^2+p_1^2p_2+p_1p_2^2)}{2(1-p_1)(1-p_2)(p_1+p_2)}$$

$$=\frac{7p_1^2+7p_2^2+16p_1p_2-7p_1-7p_2+2-9p_1^2p_2-9p_1p_2^2}{2(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)}$$

$$=\frac{7p_1(1-p_1)+7p_2(1-p_2)+9p_1p_2(1-p_1)+9p_1p_2(1-p_2)+2-2p_1p_2}{2(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)}\geq 0$$

   car $\forall i\in[\![1,3]\!]\ p_i\geq 0$, $(1-p_1)\geq 0$ et $p_i\leq 1$.

   Donc on a bien un minimum local.

   [Ou bien on étudie le signe de $f\left(\dfrac{1}{3}+h_1,\dfrac{1}{3}+h_2,\dfrac{1}{3}+h_3\right)-f\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$]

EXERCICE 4

1. En utilisant la formule on obtient

$$\varphi'_m(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+t, b+mt) + m\frac{\partial f}{\partial y}(a+t, b+mt).$$

$$\varphi''_m(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+t, b+mt) + m\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+t, b+mt) + m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+t, b+mt) + m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+t, b+mt)$$

$$\text{donc } \varphi''_m(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+t, b+mt) + 2m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+t, b+mt) + m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+t, b+mt).$$

   (car f de classe $\mathscr{C}^2$).

2. (a, b) est un point critique.

3. On regarde $\varphi''_m(t)$ comme polynôme en m : $\varphi''_m(t) = Am^2 + Bm + C$ avec $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+t, b+mt)$, $B = 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+t, b+mt)$ et $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+t, b+mt)$.

   Alors le discriminant est $\Delta = B^2 - 4AC = 4\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \leq 0$ par l'hypothèse (H_3).

   Donc φ''_m est de signe constant, mais son signe est égal au signe de $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, qui est positif, grâce à l'hypothèse (H_2).
   Donc $\varphi''_m(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

4. $\varphi''_m(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, donc φ'_m est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus on sait que $\varphi'_m(0) = 0$ grâce à l'hypothèse (H_1). Donc φ'_m négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$ ce qui donne les variations de φ_m.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'_m		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
φ_m		$\searrow$	$f(a,b)$	$\nearrow$	

5. On a donc $\forall m \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_m(t) = f(a+t, b+mt) \geq f(a, b)$.

   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on veut écrire $x = a + t$ et $y = b + mt$.

   - si $x \neq a$ on pose $t = x - a$ et $m = \dfrac{y-b}{x-a}$ et on obtient $f(x, y) \geq f(a, b)$.
   - Si $x = a$ on utilise $\psi_m(t) = f(a+mt, b+t)$ et on peut montrer les mêmes propriétés que pour φ_m, donc on obtient $f(a+mt, b+t) \geq f(a, b)$.

   Dans les deux cas on arrive à montrer que $f(x, y) \geq f(a, b)$ donc $f(a, b)$ minimum absolu.