EXERCICE 1 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Y est une variable aléatoire indépendante de X telle que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.
Déterminer la loi de $Z = XY$.

EXERCICE 2 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On sait que $P(X \geq 3) = 0,8413$ et $P(X \geq 9) = 0,0228$.
Calculer m et σ.

EXERCICE 3 Soit $A \hookrightarrow \mathcal{N}(3,2^2)$, quelle est la probabilité que l'équation $x^2 - Ax + 1 = 0$ admette deux racines réelles ?

EXERCICE 4 Calculer $\int_2^{2+\sqrt{2}} e^{-x^2+4x+2}\,dx$ en fonction de ϕ (où ϕ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$).

EXERCICE 5 $p_0, \Delta, c_0, c_1, \sigma$ sont des nombres réels strictement positifs.

- La masse nette en grammes d'un camembert en fin d'affinage est une variable aléatoire réelle X qui suit une loi normale d'écart-type donné σ.
- Selon le "litrage choisi l", l'espérance de X est plus ou moins grande et vaut m_l qui doit impérativement valoir au moins 250. Tout camembert ω est vendu à l'unité suivant la règle suivante :
  - si $X(\omega) > 230$, le prix de vente de ce camembert vaut $p(\omega) = p_0$ euros
  - si $X(\omega) \leq 230$, ce prix est ramené à $p(\omega) = p_0 - \Delta$ euros
- Le coût d'un camembert ω vaut $c(\omega) = c_0 + X(\omega)\,c_1$.

On note $B(\omega)$ le bénéfice relatif à la vente du camembert ω.

1. Exprimer l'espérance de p selon le choix de m_l.
2. Exprimer l'espérance de c selon le choix de m_l.
3. Soit $G(x) = E(B)$ pour $m_l = x$.
   (a) Calculer $G(x)$.
   (b) Étudier les variations de G sur $[250, +\infty[$.
4. Pour $p_0 = 8$ euros , $\Delta = 1$, $\sigma = 20$ grammes, $c_0 = 0,3$ euros, $c_1 = 0,0085$ euros par gramme, quelle valeur de m_l optimise-t-elle le bénéfice ? (On pourra utiliser : $\sqrt{2\sigma^2 \ln\left(\frac{\Delta}{\sigma c_1 \sqrt{2\pi}}\right)} \simeq 26,12$.)

EXERCICE 6 Un animal prélevé au hasard dans une population $\mathscr{P}$ réalise une performance X de loi $\mathcal{N}(100,10^2)$, celui-ci est sélectionné si $X \geq 120$.

1. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, déterminer $G(s) = P(X \leq s / X \geq 120)$.
2. En déduire la loi de $X|X \geq 120$ et $E(X|X \geq 120)$.
3. D'une façon générale, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $m_p = E(X|X > x_p)$, on a la relation : $m_p = m + \sigma i_p$, où i_p est appelé indice de sélection pour une pression de sélection égale à $p = P(X > x_p)$.
   Quelle est l'expression de i_p en fonction de p ?