Méthodes et indications

Remarques générales

Réflexe : calcul de $P(A)$: $P(\overline{A})$ est-elle plus simple à calculer ?

NB : complémentaire d'une union = intersection des complémentaires
complémentaire d'une intersection = union des complémentaires

NB : $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$ si l'union est disjointe (sinon $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$).

NB : Si on a la probabilité uniforme sur Ω, $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

NB : $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ si A et B sont indépendants (sinon $P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$).

Attention : A et B **indépendants** (i.e. $P(A\cap B) = P(A)P(B)$) $\neq$ A et B **disjoints** (i.e. $A\cap B = \emptyset$).

EXERCICE 1

NB : "ou" mathématique = union = l'un au moins = l'un ou l'autre ou les deux.

EXERCICE 2

1. Formule des probabilités totales.
2. Appliquer 1. avec $B' = A\cup B$, $B' = A\cup \overline{B}$, ...

EXERCICE 3

1. 3 blanches ou 3 rouges ou 3 noires → union disjointe donc somme des probabilités.

   première méthode : tirer B, puis tirer B sachant qu'on a tiré B, puis tirer B sachant qu'on a tiré $2B$ (formule des probabilités composées).

   deuxième méthode : si on dissocie chacune des boules, par probabilité uniforme, $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, choisir 3 boules parmi 20, choisir 3 boules parmi les n de la couleur en question.

2. première méthode : BRN ou BNR ou RNB ou ... (3! possibilités = façons de ranger B, R, N). Tirer B, puis R, puis N...

   deuxième méthode : $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$. Choisir $1B$, $1R$ et $1N$.

3. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

EXERCICE 4

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

EXERCICE 5

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$...

$A = n$ votent pour lui, ou $n-1$ ou $n-2$.

EXERCICE 6

$A_i =$"la i-ème personne reçoit l'information correcte"

$P(A_i)$ en fonction de $P(A_{i-1})$ (avec la formule des probabilités totales).

Exercices corrigés

EXERCICE 1

1. $A \cup B \cup C$

2. $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$ (l'un au moins se réalise mais les deux ne se réalisent pas en même temps)
   ou $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ (A se produit mais pas B, ou B se produit mais pas A)
   → vérifier que $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

3. $A \cap B \cap \overline{C}$

4. $A \cap B \cap C$

5. $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ (l'un au moins des événements ne se réalise pas)
   ou $\overline{(A \cap B \cap C)}$ (les 3 événements ne se réalisent pas en même temps).

EXERCICE 2

1. On remarque que $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$ (ces deux événements sont disjoints car $A \cap \overline{A} = \emptyset$).
   D'autre part $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap B = \Omega \cap B = B$,
   donc $P(B) = P\Big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\Big) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ (car ils sont disjoints).

2. On applique la formule prouvée à la question précedente avec $B' = A \cup B, A \cup \overline{B}, \overline{A} \cup B, \overline{A} \cup \overline{B}$:

   - $P(A \cup B) = P\big(A \cap (A \cup B)\big) + P\big(\overline{A} \cap (A \cup B)\big) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$.
   - $P(A \cup \overline{B}) = P\big(A \cap (A \cup \overline{B})\big) + P\big(\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})\big) = P(A) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
   - $P(\overline{A} \cup B) = P\big(A \cap (\overline{A} \cup B)\big) + P\big(\overline{A} \cap (\overline{A} \cup B)\big) = P(\overline{A}) + P(A \cap B)$.
   - $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P\big(A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\big) + P\big(\overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\big) = P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B})$.

   Or $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$ et $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B})$ donc

   $$P(A \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup B) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 2(P(A) + P(\overline{A})) + P(B) + P(\overline{B}) = 3.$$

EXERCICE 3

1. On appelle p_B la probabilité de tirer 3 boules blanches, p_N la probabilité de tirer trois boules noires et p_R la probabilité de tirer trois boules rouges.

   $p_B = \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18}$ ou bien $p_1 = \dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}}$.

   $p_N = \frac{4}{20} \times \frac{3}{19} \times \frac{2}{18} = \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{20}{3}}$

   $p_R = \frac{6}{20} \times \frac{5}{19} \times \frac{4}{18} = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{20}{3}}$.

   Or les trois événements sont disjoints donc p_1 = probabilité de tirer trois boules de la même couleur = $p_B + p_N + p_R = \frac{144}{20 \times 19 \times 3} = \frac{12}{95}$.

2. $p_3 = 3! \times \frac{10}{20} \times \frac{6}{19} \times \frac{4}{18}$ ou $p_3 = \frac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{20}{3}}$.

   Donc $p_3 = \frac{4}{19}$.

3. $\overline{\text{bicolore}} = \text{unicolore} + \text{tricolore}$ union disjointe donc $p_2 = 1 - p_1 - p_3 = 1 - \frac{12}{95} - \frac{4}{19} = \frac{63}{95}$.

EXERCICE 4

M =licence de maths, S =licence de sciences-économiques, D =licence de droit.

$$P(M \cup S \cup D) = P(M) + P(S) + P(D) - P(M \cap S) - P(M \cap D) - P(S \cap D) + P(M \cap S \cap D)$$

or $M \cap S \cap D = \emptyset$ car personne n'a plus que deux licences donc

$$P(M \cup S \cup D) = \frac{38}{100} = 38\%.$$

EXERCICE 5

$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1 + \binom{n}{1} \times 2 + \binom{n}{2} \times 2 \times 2}{3^n}$

Si $n \geq 5$, A, B et C sont disjoints donc la probabilité que personne ne soit élu est

$$p = 1 - 3P(A) = 1 - \frac{1 + \binom{n}{1} \times 2 + \binom{n}{2} \times 2 \times 2}{3^{n-1}}$$

EXERCICE 6

On note A_k l'événement la k-ème personne reçoit l'information correcte et $a_k = P(A_k)$.

$P(A_k) = P(A_k | A_{k-1}) P(A_{k-1}) + P\left(A_k \,\middle|\, \overline{A_{k-1}}\right) P\left(\overline{A_{k-1}}\right)$.

Donc $a_k = (1-p)a_{k-1} + p(1 - a_{k-1}) = p + (1-2p)a_{k-1}$.

C'est une suite arithmético-géometrique.

On cherche x tel que $x = p + (1-2p)x$. On obtient $x = \frac{1}{2}$.

Alors $\forall k \leq N,\ a_k - x = (1-2p)^{k-1}(a_1 - x)$.

Donc $a_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^{N-1}$.