Méthodes et indications

EXERCICE 1

1. $f^j(e_k) = f^{j-1}\big(f(e_k)\big) =?$
2. $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(?)$ $A^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(?)$

EXERCICE 2

1. Pour A^n : formule du binôme.
2. **NB :** $A \cdot B = I_n \Rightarrow A$ est inversible et $B = A^{-1}$.

EXERCICE 3

1. $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. **NB :** E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si la juxtaposition d'une base de E_1 et d'un base de E_2 est une base de E.
3. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(e'_1) = -e'_1 \\ f(e'_2) = -e'_2 \\ f(e'_3) = 2e'_3 \end{cases}$

   Or $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

EXERCICE 4

$\forall Y \in \mathbb{R}^n \exists! X \in \mathbb{R}^n$ tq $AX + Y \;\Leftrightarrow\; A$ est inversible. Dans ce cas A^{-1} est telle que $AX = Y \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}Y$.

EXERCICE 5

1. $\forall A, A' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(A + \lambda A') = \cdots = f(A) + \lambda f(A')$.

   $f(E_{11}) =?$ où $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $f(E_{12}) =?$ où $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   ...

   NB : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$ d'où la colonne corréspondante est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

2. Si une colonne est nulle dans $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alos f n'est pas bijective.

Exercices corrigés

EXERCICE 1

1. $f^2(e_1)=0, f^2(e_2)=0, f^2(e_3)=e_1, f^2(e_4)=e_2,\dots,f^2(e_n)=e_{n-2}$.
   $f^3(e_1)=0, f^3(e_2)=0, f^3(e_3)=0, f^3(e_4)=e_1,\dots,f^3(e_n)=e_{n-3}$.
   $\vdots$
   $f^n(e_1)=0, f^n(e_2)=0,\dots f^n(e_n)=0$.
   En général on peut donc écrire $\forall 1\leq j\leq n$, $\forall 1\leq k\leq n$, $f^j(e_k)=\begin{cases} 0 & \text{si } k-j\leq 0 \\ e_{k-j} & \text{sinon.}\end{cases}$

2. A est la matrice canoniquement associée à f, donc A^n est la matrice canoniquement associée à f^n. Mais alors $A^n=0_n$.

EXERCICE 2

1. $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad N^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
   Donc $N^k=0_3\ \forall k\geq 3$.
   On sait que $A=N+3I_3$ et que A et $3I_3$ commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme :
   $A^n=(N+3I_3)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k\end{pmatrix}N^k(3I_3)^{n-k}=(3I_3)^n+\begin{pmatrix} n \\ 1\end{pmatrix}N(3I_3)^{n-1}+\begin{pmatrix} n \\ 2\end{pmatrix}N^2(3I_3)^{n-2}=3^nI_3+n\cdot 3^{n-1}\cdot N+\dfrac{n(n-1)}{2}3^{n-2}N^2$
   $A^n=\begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & -n3^{n-1}-n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & -n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$.

2. $N^3=(A-3I_3)^3=A^3-9A^2+27A-27I_3$ donc $A^3-9A^2+27A-27I_3=0_3$.
   Mais alors $A\left(\dfrac{A^2-9A+27I_3}{27}\right)=I_3$, donc A est inversible et $A^{-1}=\left(\dfrac{A^2-9A+27I_3}{27}\right)$

EXERCICE 3

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad x+y+z=0$, donc $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\left\{(a,b,-a-b)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\,\langle(1,0,-1);(0,1,-1)\rangle$.

   $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0\end{cases},\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=0 \\ -3y+3z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y=z\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=y=z\quad\Leftrightarrow\quad$ donc $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\left\{(\alpha,\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\,\langle(1,1,1)\rangle$.
   Pour montrer que $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires il suffit de montrer que la juxtaposition de leur bases est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Or $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=3$.
   Donc on a bien une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires.

2. On cherche une base (e'_1,e'_2,e'_3) telle que $\begin{cases} f(e'_1)=-e'_1 \\ f(e'_2)=-e'_2 \\ f(e'_3)=2e'_3\end{cases}$
   On remarque facilement que cela équivaut à $e'_1,e'_2\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $e'_3\in\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ donc on peut prendre, par exemple $e'_1=(1,0,-1)$, $e'_2=(0,1,-1)$ et $e'_3=(1,1,1)$.

3. Dans la base $\mathscr{B}'$ la matrice de f^n est $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

EXERCICE 4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n \\ p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ p_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

   Avec la méthode du pivot de Gauss on se ramène tout d'abord au système

   $\begin{pmatrix} 1+s & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ p_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + p_1 y_1 + \dots p_n y_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ puis au système

   $\begin{pmatrix} 1+s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + p_1 y_1 + \dots p_n y_n \\ y_1 - \frac{p_1}{1+s}\left(y_0 + \sum_{k=1}^n p_k y_k\right) \\ \vdots \\ y_n - \frac{p_n}{1+s}\left(y_0 + \sum_{k=1}^n p_k y_k\right) \end{pmatrix}.$

   Donc l'unique solution est $\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{1+s}\left(y_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^n y_k p_k\right) \\ \\ x_j = y_j - \dfrac{p_j}{1+s}\left(y_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^n y_k p_k\right) & \text{si } j \in [\![1, n]\!] \end{cases}$.

2. $AX = Y$ a une et une unique solution si et seulement si A inversible et $X = A^{-1}Y$.

   Donc pour écrire la matrice de A^{-1} il suffit d'écrire la matrice ayant pour colonnes les coefficients des x_i par rapport aux y_j :

   $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s} & \frac{p_1}{1+s} & \dots & \frac{p_n}{1+s} \\ -\frac{p_1}{1+s} & 1 - \frac{p_1^2}{1+s} & \dots & -\frac{p_1 p_n}{1+s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{p_n}{1+s} & -\frac{p_1 p_n}{1+s} & \dots & 1 - \frac{p_n^2}{1+s} \end{pmatrix}$

EXERCICE 5

1. Soient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b+e+f & a+e \\ c+b+g+f & c+g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+f & e \\ g+f & g \end{pmatrix} =$

   $= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right).$

   $f\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda(a+b) & \lambda a \\ \lambda(c+b) & \lambda b \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right).$

   Donc f est bien une application linéaire.

   On a $f(E_{11}) = E_{11} + E_{12}$, $f(E_{12}) = E_{11} + E_{21} + E_{22}$, $f(E_{21}) = E_{21}$ et $f(E_{22}) = 0_2$. Donc la matrice de f dans la base canonique est

   $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Non, la matrice M n'a pas rang maximal (une colonne nulle) donc f ne peut pas être surjective.