

Méthodes et indications

EXERCICE 1

- f_1 : factoriser le dénominateur en produit de facteurs irréductibles.
- f_2 : $\frac{1}{(X-\alpha)^r} \rightsquigarrow \frac{a_1}{X-\alpha} + \dots + \frac{a_r}{(X-\alpha)^r}$.
 $\frac{1}{(aX^2+bX+c)^r} \rightsquigarrow \frac{a_1X+b_1}{aX^2+bX+c} + \dots + \frac{a_rX+b_r}{(aX^2+bX+c)^r}$
- f_3 : Pour trouver a_r : multiplier par $(X-\alpha)^r$, puis remplacer $X = \alpha$.
 Sinon, multiplier par X et faire tendre $X \rightarrow +\infty$;
 sinon, remplacer $X = 0$ ou 1 ,
 sinon, multiplier par $(aX^2+bX+c)^r$, remplacer X = une des racines complexes, puis identification de $\text{Re}(\cdot)$ et $\text{Im}(\cdot)$.

EXERCICE 2

Répérer du $u'u^\alpha$, $u'v + uv'$, $\frac{u'}{u}$, $u'g(u)$, changement de variable.

Valeur absolue, maximum $\rightsquigarrow$ on coupe l'intégrale avec la relation de Chasles.

EXERCICE 3

1. $\forall t \in [k, k+1], ? \leq \frac{1}{t} \leq ?$ puis positivité de l'intégrale.

2. On somme k de 1 à n .

$$u_n \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}.$$

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}, \text{ d'où } u_n - 1 \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$.

EXERCICE 4

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = ?$
3. On intègre la relation obtenue au 2, on obtient $F(x) \leq \dots$, puis on utilise l'hypothèse de l'énoncé.

NB :

Primitive de $\frac{\alpha x + \beta}{\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}}$

$$1. \alpha x \rightsquigarrow \frac{u'}{u}$$

$$\frac{\alpha}{2\tilde{a}} \cdot \frac{2\tilde{a}x + \tilde{b}}{\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}} + \frac{\beta - \frac{\tilde{b}\alpha}{2\tilde{a}}}{\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}}$$

et on remarque que la primitive de $\frac{2\tilde{a}x + \tilde{b}}{\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}}$ est $\ln|\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}|$

$$2. \frac{1}{\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}} = \frac{1/\tilde{a}}{(x-a)^2 + b^2}.$$

(Trouver a pour que $(x-a)^2 = x^2 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}x + \text{constante}$)

$$\frac{1}{(x-a)^2 + b^2} \rightsquigarrow (\text{primitive}) \frac{1}{b} \text{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Exercices corrigés

EXERCICE 1

- $$\int f_1(x) dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On calcule tout d'abord la division euclidienne : $-x^3 + 2x^2 + 2x - 2 = (x^2 - 2x)(-x) + (2x - 2)$ donc $f_2(x) = -x + 2 \frac{x-1}{x(x-2)}$.
Ensuite

$$\int f_2(x) dx = \int \left(-x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\frac{x^2}{2} + \ln|x| + \ln|x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- $$\begin{aligned} \int f_3(x) dx &= \int \left(\frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3x+2/3}{x^2-x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- On remarque que -1 est racine de $x^3 + x + 2$ donc on le divise par $(x+1)$: $x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2 - x + 2)$.

$$\begin{aligned} \int f_4(x) dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \int \left(\frac{2x-1}{x^2-x+2} - \frac{3}{x^2-x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{8} \ln|x^2-x+2| + \frac{3}{8} \int \frac{1}{x^2-x+2} dx = \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{8} \ln|x^2-x+2| + \frac{3}{8} \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2-x+2| + \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) \right] + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

- $$I_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{5+t^3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3t^2}{\sqrt{5+t^3}} dt = \frac{1}{3} \left[2\sqrt{5+t^3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (2\sqrt{6} - 2\sqrt{5}) = \frac{2}{3} (\sqrt{6} - \sqrt{5}).$$

- Pour calculer I_2 on reconnaît la forme $u'v + uv' = (uv)'$ avec $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \sin(t)$ (qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$).

Donc $I_2 = \left[\frac{\sin(t)}{t} \right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{2}{\pi}.$

- $$I_3 = \left[\ln|\ln t| \right]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)). \text{ (forme } \frac{u'}{u} \text{ avec } u() = \ln(t)).$$

- $$I_4 = \int_0^1 t^2 \cdot 2t^3 dt = \int_0^1 t^2 e^{t^3 \ln(2)} dt = \frac{1}{3 \ln(2)} \int_0^1 (3t^2 \ln(2)) e^{t^3 \ln(2)} dt = \frac{1}{3 \ln(2)} \left[e^{t^3 \ln(2)} \right]_0^1 = \frac{1}{3 \ln(2)} (e^{\ln(2)} - 1) = \frac{1}{3 \ln(2)}.$$

- Ici on pose $u(t) = \tan(t)$ (alors $u'(t) = \frac{1}{\cos(t)}$) et on obtient $I_5 = \int_0^1 (u^2 - 2u + 5) du = \left[\frac{u^3}{3} - u^2 + 5u \right]_0^1 = \frac{13}{3}.$

- On remarque que $(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ donc

$$I_6 = \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 1.$$

- $$I_7 = \int_{-1}^1 1 dx + \int_1^3 x dx = 2 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = 6.$$

EXERCICE 3

1. L'application $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

et donc en intégrant sur cet intervalle

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt.$$

et donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

2.

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{i.e.} \quad \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq u_n \Leftrightarrow \ln(n+1) \leq u_n.$$

D'autre part $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ donc

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \Leftrightarrow u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n),$$

ce qui prouve l'inégalité demandée.

En divisant par $\ln(n)$ on obtient

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} \rightarrow 1$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$ et donc $u_n \sim \ln(n)$.

EXERCICE 4

1. F est une primitive de f donc $F'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Mais alors $F'(x) \leq aF(x) + b$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $G'(x) = F'(x)e^{-ax} + F(x)(-ae^{-ax}) \leq (aF(x) + b)e^{-ax} - ae^{-ax}F(x) = be^{-ax}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $\int_0^x G'(x) dx = G(x) - G(0) = F(x)e^{-ax} \leq b \int_0^x e^{-ax} dx$, grâce à la question précédente.

Mais alors $F(x)e^{-ax} \leq \frac{b}{a}(1 - e^{-ax})$,

donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) \leq \frac{b}{a}(e^{ax} - 1)$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leq aF(x) + b$, donc $f(x) \leq be^{ax}$.