EXERCICE 1

NB : Pour montrer que $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ est libre :
"Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots \lambda_k \vec{e}_k = \vec{0}$." Montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

NB : Pour montrer que $\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_k\}$ est une famille génératrice de E :
"Soit $\vec{x} \in E$ (quelconque !), trouver $x_1, \dots x_k$ tels que $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots x_k \vec{e}_k$

NB :
- Si $\dim E = n$, une famille libre ne peut pas comporter strictement plus de n éléments.
- Si $\dim E = n$, une famille génératrice ne peut pas comporter strictement moins de n éléments.

EXERCICE 2

Mêmes indications que pour l'exercice 1.

EXERCICE 3

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ (où 0 est l'application nulle).
f_1 est dérivable sur ...
$\lambda_1 f_1 = -\lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3$ est derivable en ..., d'òù $\lambda_1 = 0$...

EXERCICE 4

1. Pour montrer que c'est une famille libre on utilise l' idéntification des coefficients.

   NB : Une famille libre de $n = \dim E$ éléments est une base (et donc une famille génératrice).

2. Pour montrer que c'est une famille libre : prendre $X = \dots$ bien choisi.

EXERCICE 5

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 g_0 + \cdots + \lambda_n g_n + \lambda_{n+1} g_{n+1} = 0$ (L_1). On dérive deux fois.
But : obtenir une deuxième équation L_2 avec $g_0, \dots, g_n, g_{n+1}$.
But : "se débarasser" de g_{n+1}.
$\rightarrow$ obtenir une combinaison linéaire de $g_0, \dots, g_n$ puis utiliser l'hypothèse de récurrence ($\{g_0, \dots, g_n\}$ libre).

EXERCICE 1

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 = 0_E$. Montrons qu'alors $\lambda = \mu = 0$.
En effet on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ 0 = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

qui a comme unique solution $\lambda = \mu = 0$.

Donc $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$. Ce n'est pas une famille génératrice car, par exemple, $(0,1,0) \notin Vect\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$. (ou bien on remarque que la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, donc une famille génératrice doit avoir au moins 3 éléments).

EXERCICE 2

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ n'est pas une famille libre, car $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc toute famille possédant strictement plus de 3 éléments est liée.

Montrons maintenant que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ est une famille génératrice. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 + \lambda_4 \vec{e}_4 = (x, y, z)$.

On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = x \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = y \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \end{cases}$$

qui admet comme solution tout élément de la forme $\left(\alpha - y, \alpha, -\alpha + \dfrac{x+y+z}{3}, -\dfrac{x+y-2z}{3}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ est bien une famille génératrice.

EXERCICE 3

f_1 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Alors $\lambda_1 f_1 = -\lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3$ mais le terme de droite de cette égalité est dérivable en 1, donc le terme de gauche l'est aussi, alors $\lambda_1 = 0$. On montre de la même manière que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et on conclut que la famille est libre.

EXERCICE 4

1. Montrons que $\{X+1, X+2, X^2+1\}$ est une famille libre. En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(X+1)+\beta(X+2)+\gamma(X^2+1) = 0$, i.e. $\gamma X^2+(\alpha+\beta)X+(\alpha+2\beta+\gamma) = 0$ mais un polynôme est égal au polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls donc on obtient le système

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

   qui a comme unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

   Donc la famille $\{X+1, X+2, X^2+1\}$ est libre.

   Comme la dimensionde $\mathbb{R}_2[X]$ est 3, alors toute famille libre de 3 éléments est une base. Donc $\{X+1, X+2, X^2+1\}$ est une base, et donc c'est aussi une famille génératrice.

2. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha[X(X-1)] + \beta[(X-1)(X-2) + \gamma[X(X-2)] = 0$.

   En remplaçant $X = 0$ on obtient $2\beta = 0$.

   En remplaçant $X = 2$ on obtient $2\alpha = 0$.

   En remplaçant $X = 1$ on obtient $-\gamma = 0$.

   Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et donc la famille donnée est libre. On peut conclure qu'elle est aussi génératrice par un argument de dimension, comme à la question précedente.

EXERCICE 5

On remarque tout d'abord que $g_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\{g_0\}$ est une famille libre.

Calculons maintenant $g_k''(x)$.

$$g_k'(x) = -k\cos^{k-1}(x)\sin(x)$$

$$g_k''(x) = -k^2\cos^k(x) + k(k-1)\cos^{k-2}(x) = k(k-1)g_{k-2} - k^2 g_k.$$

Supposons (hypothèse de récurrence) que la famille $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ soit libre. On veut montrer que la famille $\{g_0, g_1, \dots, g_n, g_{n+1}\}$ est libre aussi.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n + \lambda_{n+1} g_{n+1} = 0. \qquad (L_1)$$

En dérivant deux fois cette égalité on obtient

$$\lambda_0 g_0''(x) + \lambda_1 g_1''(x) + \cdots + \lambda_n g_n''(x) + \lambda_{n+1} g_{n+1}''(x) = 0.$$

id est

$$\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \left(k(k-1)g_{k-2} - k^2 g_k\right) = 0$$

qu'on peut réecrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\lambda_{k+2}(k+2)(k+1) - \lambda_k k^2\right) g_k\right] - n^2\lambda_n g_n - (n+1)^2\lambda_{n+1} g_{n+1} = 0 \qquad (L_2)$$

On calcule maintenant $L_2 - (n+1)^2 L_1$ et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\lambda_{k+2}(k+2)(k+1) - \lambda_k k^2 + (n+1)^2\lambda_k\right) g_k\right] - \lambda_n(n^2 + (n+1)^2) g_n = 0$$

Mais, par hypothèse de récurrence $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ est une famille libre donc on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{llllll}
(n+1)^2\lambda_0 & & +2\lambda_2 & & & = 0 \\
& ((n+1)^2-1)\lambda_1 & & +6\lambda_3 & & = 0 \\
& & \ddots & & & \vdots \\
& & & ((n+1)^2-(n-1)^2)\lambda_{n-1} + n(n+1)\lambda_{n+1} & & = 0 \\
& & & & ((n+1)^2+n^2)\lambda_n & = 0
\end{array}\right.$$

qui est un système de Cramer. Donc l'unique solution est $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

On remplace donc dans l'équation L_1 et on obtient $\lambda_{n+1} g_{n+1} = 0$ donc $\lambda_{n+1} = 0$.

On peut donc en déduire que la famille $\{g_0, g_1, \dots, g_{n+1}\}$ est libre, ce qui conclut la démonstration par récurrence.

EXERCICE 6

1. NON : toute base de $\mathbb{R}^3$ a 3 éléments.
2. NON : toute base de $\mathbb{R}^3$ a 3 éléments.
3. NON : toute famille contenant $\vec{0}$ n'est pas libre.
4. NON : $(-2,2,0) = -2(1,-1,0)$ donc cette famille est liée.
5. NON : $(0,0,1) \notin \mathrm{Vec}\langle(1,0,0);(0,1,0);(1,1,0)\rangle$.
6. NON : $(2,2,0) = 2(1,1,0)$ donc cette famille est liée.