Méthodes et indications

EXERCICE 1

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ?$

2. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\langle(\dots)\rangle$ (famille libre car un seul vecteur $\neq \vec{0}$)

> **NB :** Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$.

3. Est-ce que la juxtaposition d'une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$ donne une base de $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE 2

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
2. $f(1) = ?\ f(X) = ?\ f(X^2) = ?\ f(X^3) = ? \to$ colonnes de $Mat_{\mathscr{B}}(f)$.

EXERCICE 3

1. $f(1) = ?\ f(X) = ?\ f(X^2) = ?\ f(X^3) = ? \to$ colonnes de $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.
2. Il s'agit de montrer que $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ admet un unique antécedent pour f. Il suffit de montrer que f est une bijection (et donc de montrer que $\operatorname{rg} f = 4 = \dim \mathbb{R}^4$).

EXERCICE 4

1. $f^2 = 0$ d'où ... Puis théorème du rang.

> **NB :** $f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ non inversible.

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. Puis on compose par f.

EXERCICE 5

1. > **NB :** En dimension finie $f \circ g = \operatorname{Id}_E \Longrightarrow f$ bijection et $g = f^{-1}$.

2. $\alpha x + \beta f(x) = 0$ puis on compose par $f \to$ on obtient deux équations, puis on se débarasse de $f(x)$.

> **NB :** Card(famille libre) $\leq \dim E$.

3. On compose par f on se débarasse de $f(y)$. Théorème de la base incomplète : si $E = \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$, $\big(x, f(x)\big)$ libre d'où $\exists y \in \mathbb{R}^3$ tel que $\big(x, f(x), y\big)$ libre. Mais alors $\big(x, y, f(x), f(y)\big)$ famille libre de 4 éléments. Absurde.

Exercices corrigés

EXERCICE 1

1. $f\big((x,y,z)\big) = f\big(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\big) = xf\big((1,0,0)\big)+yf\big((0,1,0)\big)+zf\big((0,0,1)\big) = x(1,2,1)+y(-1,1,2)+z(2,1,-1) = (x-y+2z, 2x+y+z, x+2y-z)$.

   Cela revient à calculer
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 2x+y+z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$$

2. $\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\}$.

   On obtient donc le système
$$\left\{\begin{array}{l} x-y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y+2z=0 \\ 3y-3z=0 \\ 3y-3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z+y \\ y=z \end{array}\right.$$
$$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{pmatrix}$$

   dont l'ensemble des solutions est $\{(-z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

   Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\langle(-1,1,1)\rangle$

   et $(-1,1,1)$ en est une base (car famille génératrice, et toute famille contenant un seul élément non nul est libre).

   D'autre part $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\big\langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big\rangle = \mathrm{Vect}\langle(1,2,1),(-1,1,2),(2,1,-1)\rangle$. Or par le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f$, donc $3 = \dim \mathrm{Im} f + 1$, donc $\dim \mathrm{Im} f = 2$. Il faut donc éliminer un élement dans la famille génératrice. On remarque que $(2,1,-1) = (1,2,1)-(-1,1,2)$ donc on peut éliminer $(2,1,-1)$ et on obtient donc une base de $\mathrm{Im} f$: $\big((1,2,1);(-1,1,2)\big)$

3. Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$ il suffit de montrer que la juxtaposition d'une base de $\mathrm{Im} f$ et une base de $\mathrm{Ker} f$ donne une base de $\mathbb{R}^3$.

   Montrons donc que $\mathrm{rg}\big((-1,1,1);(1,2,1);(-1,1,2)\big) = 3$.
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$
$$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{pmatrix}$$

   donc on peut conclure que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

EXERCICE 2

1. Si $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc $(P(X+1)-P(X)) \in \mathbb{R}_n[X]$.

   Il reste à montrer que $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(P+Q) = f(P)+f(Q)$ et $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.

   Or $f(P+Q) = (P+Q)(X+1)-(P+Q)(X) = P(X+1)+Q(X+1)-P(X)-Q(X) = f(P)+f(Q)$ et $f(\lambda P) = (\lambda P)(X+1) - (\lambda P)(X) = \lambda P(X+1) - \lambda P(X) = \lambda f(P)$.

2. La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$.

   Or $f(1) = 0, f(X) = 1, f(X^2) = 2X+1, f(X^3) = 3X^2+3X+1$ donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg} M = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

   Donc le rang de f est 3.

EXERCICE 3

1. On a : $f(1) = (1,0,0,0)$, $f(X) = (0,1,0,0)$, $f(X^2) = (0,2,2,0)$ et $f(X^3) = (0,3,12,6)$. Donc la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Donc $\operatorname{rg} M = 4$, donc f est un isomorphisme, et donc il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $f(P) = (1,1,1,1)$.

EXERCICE 4

1. Montrons tout d'abord que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En effet, soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})\ \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(\vec{y}) = f(f(\vec{x})) = (f \circ f)(\vec{x}) = 0$. Donc $\vec{y} \in \operatorname{Ker} f$.

   Or $f \neq 0$ donc $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$ et $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim \operatorname{Ker} f$ (car on vient de montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$). Mais alors par le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2$ Donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f = 1$ et donc, comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

2. Comme $f(u) \neq 0$ on peut déduire que $u \neq 0$. Or si, par absurde, $\big(u, f(u)\big)$ n'était pas une base de $\mathbb{R}^2$ alors u et $f(u)$ seraient colináires, i.e. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(u) = \alpha u$. Mais alors en appliquant f à cette égalité on obtiendrait $f(f(u)) = \alpha f(u) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha f(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = 0$ contradiction.

   La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (car $f(u) = f(u)$ et $f(f(u)) = 0$ sont les deux colonnes de la matrice).

EXERCICE 5

1. $\operatorname{rg} f^2 = n$ donc f^2 est un isomorphisme. En particulier $\operatorname{Ker} f^2 = \{0\}$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$ alors $x \in \operatorname{Ker} f^2$ alors $x = 0$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Donc f injective et un endomorphisme injectif dans un espace vectoriel de dimension finie est un automorphisme (bijection).

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0$ (L_1). En appliquant f à l'identité précedante on obtient : $\alpha f(x) - \beta x = 0$ (L_2) et en calculant $\alpha L_1 - \beta L_2$ on obtient $(\alpha^2 + \beta^2)x = 0$. Or $x \neq 0$ alors $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et donc (somme de deux carrés) $\alpha = \beta = 0$. Donc $\big(x, f(x)\big)$ est libre. Mais alors $n \geq 2$ (dimension de l'espace).

3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ax + by + cf(x) + df(y) = 0$ (L_3). On applique f : $af(x) + bf(y) - cx - dy = 0$ (L_4). On calcule $bL_3 - dL_4$ et on obtient $(ab + cd)x + (b^2 + d^2)y + (bc - ad)f(x) = 0$. Mais $\big(x, f(x), y\big)$ famille libre donc $b^2 + d^2 = bc - ad = ab + cd = 0$ en particulier $b = d = 0$ mais alors on obtient (à partir de L_3) $ax + cf(x) = 0$ donc $a = c = 0$ et donc $\big(x, f(x), y, f(y)\big)$ est une famille libre.

   Théorème de la base incomplète : si $E = \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$, $\big(x, f(x)\big)$ libre d'où $\exists y \in \mathbb{R}^3$ tel que $\big(x, f(x), y\big)$ libre. Mais alors $\big(x, y, f(x), f(y)\big)$ famille libre de 4 éléments. Absurde. Donc il ne peux pas y avoir d'endomorphisme f de $\mathbb{R}$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}$.