Devoir surveillé de Mathématiques n°4- corrigé.

Classe de KBL. Lycée Michel Montaigne. Année scolaire 2013/2014.

12 fevrier 2014

EXERCICE 1 (ENSAI 2004)

On remarque tout d'abord que $X(\Omega) = \mathbb{R}$, $Y(\Omega) =]0, +\infty[$, $Z(\Omega) =]z_0, +\infty[$.

1. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $G(x) = 0$.
   $\forall x \in]0, +\infty[, \quad G(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x)) = \Phi(\ln(x))$.

2. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $g(x) = G'(x) = 0$.
   $\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = G'(x) = \Phi'(\ln(x)) \cdot \dfrac{1}{x} = f_{m,\sigma}(\ln(x)) \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln(x) - m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

3. Par le théorème du transfert, $EY = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t f_{m,\sigma}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(t) \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ (ou bien on calcule directement l'espérance à partir de $g(t)$ et on fait un changement de variable pour retrouver la même intégrale).
   On fait le changement de variable donné par $u = \dfrac{t-m}{\sigma}, \quad \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\sigma}\mathrm{d}t \quad (t = \sigma u + m)$.
   $EY = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \exp(\sigma u + m)\sigma \mathrm{d}u$
   Or $-\dfrac{1}{2}u^2 + \sigma u + m = -\dfrac{1}{2}(u-\sigma)^2 + \dfrac{1}{2}\sigma^2 + m$
   donc en faisant le changement de variable $v = u - \sigma$ on obtient
   $EY = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 + m\right) \mathrm{d}v = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + m\right)$
   Ensuite on calcule $E(Y^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{2t} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t$ (théorème du transfert)
   puis grâce au changement de variable $u = \dfrac{t-m}{\sigma}$
   $E(Y^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \exp(2\sigma u + 2m)\,\sigma\,\mathrm{d}u.$
   Or $-\dfrac{u^2}{2} + 2\sigma u + 2m = -\dfrac{1}{2}(u - 2\sigma)^2 + 2\sigma^2 + 2m$ donc par le changement de variable $v = u - 2\sigma$
   $E(Y^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \exp(2\sigma^2 + 2m) = \exp(2\sigma^2 + 2m).$
   Et donc $VY = E(X^2) - (EX)^2 = e^{\sigma^2 + 2m}(e^{\sigma^2} - 1)$.

4.

NB : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X var. Alors : $E(aX + b) = aE(X) + b$ $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

$EZ = E(z_0 + Y) = E(z_0) + E(Y) = z_0 + E(Y) = z_0 + \exp\left(\dfrac{\sigma^2}{2} + m\right)$.

$VZ = V(z_0 + Y) = V(Y) = e^{\sigma^2 + 2m}(e^{\sigma^2} - 1)$.

PROBLÈME 1 (ENS 2012)

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1[)$, alors

$$F_X : \quad \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \to F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(Car $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{[0,1[}(t)\,\mathrm{d}t$.)

2. $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f_n continue (sauf éventuellement en 0) car produit de fonctions continues.

On remarque que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 x^n e^{-x}}{n!} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (croissances comparées), donc $\int_{\mathbb{R}} f_n$ converge par le critère de Riemann.

$\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$

$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$

Donc f_0 et f_1 sont des densités de probabilité. Montrons par récurrence que f_n est une densité de probabilité pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit n tel que f_{n-1} est une densité de probabilité (hypothèse de récurrence) montrons que alors f_n est une densité de probabilité.

En effet, $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\cdot\dfrac{x^n}{n!}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Donc f_n est une densité de probabilité pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. f croissante sur $]-\infty;a]$, décroissante sur $[a;+\infty[\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in]-\infty;a]$ et $f'(x) \leq 0 \forall x \in [a;+\infty[$.

NB : Calcul de $\int_I |\varphi|$, couper l'intégrale avec Chasles : $\int_I |\varphi| = \int_{I_1} |\varphi| + \int_{I_2} |\varphi|$, avec I_1 tel que $\varphi \geq 0$ sur I_1 et I_2 tel que $\varphi < 0$ sur I_2.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} |f'(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(a) - \lim_{x\to-\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} f(x) + f(a)$

NB : $|\varphi|$ intégrable sur $\mathbb{R}$ signifie $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|$ converge.

Or on sait que $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ converge donc les deux limites ci-dessous doivent converger ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l_\pm$. De plus f est une densité de probabilité donc $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ donc $l_+ = l_- = 0$.

On conclut $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = 2f(a)$.

4.

NB : On pense à utiliser le théorème des accroissements finis. Si on l'applique entre 0 et x pour $x \in [0,1[$, on obtient C et pas $\dfrac{C}{2}$. On l'applique alors entre 0 et x pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ et entre x et 1 pour $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

- Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$. On sait que f continue sur $[0, x]$ (car dérivable sur $[0,1[$) et dérivable sur $]0, x[$, alors il existe $c_1 \in]0, x[$ tel que $g(x) - g(0) = g'(c_1)(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = g'(c_1)x$.
  Mais $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $\left|g'(c_1)\right| \leq C$ donc $\left|g(x)\right| \leq \frac{C}{2}$.
- Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, f continue sur $[x, 1[$, dérivable sur $]x, 1[$ alors il existe $c_2 \in]x, 1[$ tel que $g(x) - g(1) = g'(c_2)(x-1)$.
  Or $|x-1| \leq \frac{1}{2}$ et $\left|g'(c_2)\right| \leq C$ donc $\left|g(x)\right| \leq \frac{C}{2}$.

Donc pour tout $x \in [0, 1[$ on a $\left|g(x)\right| \leq \frac{C}{2}$.

5. $(\lfloor X \rfloor = k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :

$$P(\text{frac}(X) \leq t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(\text{frac}(X) \leq t \cap \lfloor X \rfloor = k).$$

Or $\text{frac}(X) \leq t$ et $\lfloor X \rfloor = k \quad \Leftrightarrow \quad k \leq X \leq k+t$.

Donc $P(\text{frac}(X) \leq t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} P(k \leq X \leq k+t)$.

6. $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+t} f(x)\,\mathrm{d}x - t \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$.

Or $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+t} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$ donc ces deux séries convergent.

> **Attention :** Pour pouvoir écrire $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} a_k + \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} b_k$, il faut que les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ convergent.

Alors $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+t} f(x)\,\mathrm{d}x - t \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} P(k \leq X \leq k+t) - t \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} P(k \leq X \leq k+t) - t$.

> **NB :** $\int_I f_X(t)\,\mathrm{d}t = P(X \in I)$, où f_X densité de X.

7.

> **NB :** Montrer que $\varphi : t \to \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)\,\mathrm{d}x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. dérivable) sur I, où f continue sur un intervalle J et u, v de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. dérivables) sur I à valeurs dans J :
> introduire F une primitive de f sur J, F est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que primitive d'une fonction continue, or $\forall t \in I, \quad \varphi(t) = F(v(t)) - F(u(t))$ d'où φ est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. dérivable) en tant que somme et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. dérivables).
> $\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = v'(t) f(v(t)) - u'(t) f(u(t))$.

Soit F une primitive de f, alors F est dérivable.

$g_k(t) = F(k+t) - F(k) - t \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$g_k(t)$ est somme de fonctions dérivables donc dérivable et

$g_k'(t) = F'(k+t) - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(k+t) - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \left(f(k+t) - f(x)\right)\mathrm{d}x$

$= \int_k^{k+t} \left(\int_x^{k+t} f'(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x + \int_{k+t}^{k+1} \left(\int_x^{k+t} f'(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x = \int_k^{k+t} \left(\int_x^{k+t} f'(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x + \int_{k+t}^{k+1} \left(-\int_{k+t}^{x} f'(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x$

> **NB :** Pour f de classe $\mathscr{C}^1$ (f dérivable et f' continue par morceaux suffit), $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$

Or $x \le s \le k+t$ et $k \le x \le k+t \quad \Leftrightarrow \quad k \le s \le k+t$ et $k \le x \le s$,

et $k+t \le x \le k+1$ et $k+t \le s \le x \quad \Leftrightarrow \quad k+t \le s \le k+1$ et $s \le x \le k+1$ donc on obtient

$g_k'(t) = \int_k^{k+t} \left(\int_k^s f'(s)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s - \int_{k+t}^{k+1} \left(\int_s^{k+1} f'(s)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s = \int_k^{k+t} (s-k) f'(s)\,\mathrm{d}s - \int_{k+t}^{k+1} (k+1-s) f'(s)\,\mathrm{d}s.$

Donc $\left| g_k'(t) \right| \le \int_k^{k+t} |s-k| \left| f'(s) \right| \mathrm{d}s + \int_{k+t}^{k+1} |k+1-s| \left| f'(s) \right| \mathrm{d}s$

(par positivité de l'intégrale et inégalité triangulaire).

Or $|s-k| \le 1$ et $|k+1-s| \le 1$ donc $\left| g_k'(t) \right| \le \int_k^{k+1} \left| f'(s) \right| \mathrm{d}s$.

8. g_k dérivable, $g_k(0) = g_k(1) = 0$ et $\left| g_k'(t) \right| \le C \; \forall t \in [0,1[$ (où $C = \int_k^{k+1} \left| f'(x) \right| \mathrm{d}x$)

alors grâce à la question 4 on obtient $\left| g_k(t) \right| \le \frac{C}{2} \; \forall t \in [0,1[$

et donc $P(\mathrm{frac}(X) \le t) - t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t) \le \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| g_k(t) \right| \le \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \left| f'(x) \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f'(x) \right| \mathrm{d}x.$

En passant à la borne supérieure :

$$\sup_{t \in [0,1]} |P(\mathrm{frac}(X) \le t) - t| \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f'(x) \right| \mathrm{d}x.$$

> **NB :** Montrer que $\sup_{t \in I} \varphi(t) \le M$: montrer que $\forall t \in I, \varphi(t) \le M$ puis "en passant à la borne supérieure"...
> (borne supérieure = plus petit des majorants, or M est un majorant d'où $\sup_{t \in I} \varphi(t) \le M$).

9. Soit $n \ge 2$, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$).

$$\forall x > 0, \quad f_n'(x) = \frac{n x^{n-1} e^{-x}}{n!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = f_{n-1}(x) - f_n(x) = \frac{(n-x)e^{-x}}{n!}.$$

Donc f_n' a le même signe que $(n-x)$.

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	

Donc (grâce à la question 3) $\int_{\mathbb{R}} \left| f_n'(t) \right| \mathrm{d}t = 2 f_n(n) = 2 \frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

Pour $n \to +\infty$, $2 \frac{n^n e^{-n}}{n!} \sim \frac{n^n e^{-n} e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0$ (équivalent de Stirling).

Alors par comparaison :

$$\sup_{t \in [0,1[} |P(\mathrm{frac}(Z_n) \le t) - t| \to 0, \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

10. **NB :** $\lfloor x \rfloor = a \quad \Leftrightarrow \quad a \le x < a+1$.

> **NB :** $P(a \le X < b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a)$.

$P(F=1) = P(\lfloor X \rfloor = 1) = P(1 \le X < 2) = \dfrac{\ln(2) - \ln(1)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}$.

$P(F \in \{2,3\}) = P(2 \le X < 4) = \dfrac{\ln(4) - \ln(2)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(4/2)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}$.

$P(F \in \{5,\dots,9\}) = P(5 \le X < 10) = \dfrac{\ln(10) - \ln(5)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(10/5)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}$.

11. $X(\Omega) = [1,10[$, $Y(\Omega) = [0,1[$. $Y \hookrightarrow \log_{10}(X)$.

> **NB :** Calculer F_Y ? D'abord $Y(\Omega) = [a,b]$. Puis $\forall x \le a, F_Y(x) = 0, \forall x \ge b, F_Y(x) = 1$ et $\forall x \in [a,b], F_Y(x) = P(Y \le x) = ... = P(X \in I)$.

$\forall x \in [0,1[$, $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(\log_{10} X \le x) = P(X \le 10^x) = \log_{10}(10^x) = x$.

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1[)$.

12. $\forall x \in]1,10[$, $M(x) = x$ car $x = x \cdot 10^0, x \in [1,10[$.

$\forall x \in [10,100[$, $M(x) = \dfrac{x}{10}$ car $x = \dfrac{x}{10} \cdot 10$ et $\dfrac{x}{10} \in [1,10[$.

En général :

$\forall j \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in [10^j, 10^{j+1}[$, $M(x) = \dfrac{x}{10^j}$ car $x = \dfrac{x}{10^j} \cdot 10^j$ et $\dfrac{x}{10^j} \in [1,10[$.

$M(X)(\Omega) \subset [1,10[$.

$\forall y \in [1,10[, \quad P(M(X) \le y) = P(X \in [1,y] \cup [10,10y] \cup \dots [10^{k-1}, 10^{k-1}y]) = P(X \in [1,y]) + \cdots + P(X \in [10^{k-1}, 10^{k-1}y])$

$= \dfrac{(y-1) + 10(y-1) + \dots 10^{k-1}(y-1)}{10^k - 1} = \dfrac{(y-1)\dfrac{1-10^k}{1-10}}{10^k - 1} = \dfrac{y-1}{9} = \dfrac{y-1}{10-1}$,

d'où $M(X) \hookrightarrow \mathscr{U}([1,10[)$.

13. Soit $y > 0$. On souhaite calculer $M(y)$:

on cherche j tel que $10^j \le y < 10^{j+1}$. On obtient $j \le \log_{10}(y) \le j+1$ donc $j = \lfloor \log_{10}(y) \rfloor$.

Donc $M(y) = \dfrac{y}{10^j} = \dfrac{y}{10^{\lfloor \log_{10}(y) \rfloor}}$.

Donc $M(y) \le x \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{y}{10^{\lfloor \log_{10}(y) \rfloor}} \le x \quad \Leftrightarrow \quad y \le x 10^{\lfloor \log_{10}(y) \rfloor} \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10}(y) \le \log_{10}(x) + \lfloor \log_{10}(y) \rfloor$

$\Leftrightarrow \quad \log_{10}(y) - \lfloor \log_{10}(y) \rfloor \le \log_{10}(x)$.

Donc $M(y) \le x \quad \Leftrightarrow \quad \text{frac}(\log_{10}(y)) \le \log_{10}(x)$.

Alors $P(M(X) \le x) = P(\text{frac}(\log_{10}(X))) \le \log_{10}(x)$.

14. $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n est une var strictement positive.

Soit $t \in [1,10]$, alors par la question 13 on a $P(M(Y_n) \le t) - \log_{10}(t) = P(\text{frac}(\log_{10}(Y_n)) \le \log_{10}(t)) - \log(t)$.

Or $Y_n = 10^{Z_n}$, donc $\log_{10}(Y_n) = Z_n$.

$t \in [1,10] \quad \Leftrightarrow \quad s = \log_{10}(t) \in [0,1]$

$\sup_{t \in [1,10]} \left| P(M(Y_n) \le t) - \log_{10} t \right| = \sup_{s \in [0,1]} |P(\text{frac}(Z_n) \le s) - s|$ et cela tend vers 0 grâce à la question 9.

PROBLÈME 2 (ECRICOME 2008)

Partie 1.

1. $\mathscr{F} = \text{Vect}\langle A, B, C\rangle$ donc $\mathscr{B}$ est une famille génératrice pour $\mathscr{F}$.

   Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $aA + bB + cC = 0_3$.

   On obtient
   $$\begin{pmatrix} -2b+c & 0 & 0 \\ 3b-2c & b-c & 0 \\ -a-2b & 0 & a+c \end{pmatrix} = 0_3$$
   en particulier on obtient le système $\begin{cases} -2b+c=0 \\ b-c=0 \\ a+c=0 \end{cases}$ qui a pour unique solution $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ donc (A, B, C) est une famille libre (et génératrice) donc c'est une base de $\mathscr{F}$. On en déduit que $\dim\mathscr{F} = 3$.

2. $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Comme à la question précedente on pose $aA + bB + cC = B^2$ et on obtient :
   $$\begin{pmatrix} -2b+c & 0 & 0 \\ 3b-2c & b-c & 0 \\ -a-2b & 0 & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   l'unique solution du système obtenu est $(a, b, c) = (6, -5, -6)$ donc $B^2 = 6A - 5B - 6C$.

Partie 2.

1.
   - <u>Première méthode :</u> On calcule $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On montre que (M_1, M_2, M_3) est une famille libre (comme à la Partie 1), puis on conclut par un argument de dimension ($\dim\mathscr{F} = 3$, (M_1, M_2, M_3) famille libre de trois éléments de $\mathscr{F}$ donc base de $\mathscr{F}$).
   - <u>Deuxième méthode :</u> On écrit la matrice ayant pour colonnes les composantes de M_1, M_2 et M_3 dans la base (A, B, C) : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que $\text{rg}P = 3$, donc $\text{rg}(M_1, M_2, M_3) = 3$ donc (M_1, M_2, M_3) est une famille libre de trois éléments dans un espace de dimension trois, donc c' est bien une base de $\mathscr{F}$.

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule P^{-1}
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   $$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (faire la vérification).

3. $M_1M_2 = M_2M_1 = M_3M_1 = M_1M_3 = M_2M_3 = M_3M_2 = 0_3$.

4. On remarque tout d'abord que $M_1^2 = M_1$, $M_2^2 = M_2$ et $M_3^2 = M_3$. Puis par récurrence : soit $n \geq 2$ tel que $M_i^n = M_i$ ($i \in [\![1,3]\!]$) alors $M_i^{n+1} = M_i^2 = M_i$ ce qui permet de conclure la récurrence.

5. Soient M et $N \in \mathscr{F}$ alors il existe $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$ tels que $M = \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3$ et $N = \alpha' M_1 + \beta' M_2 + \gamma' M_3$ donc $NM = \alpha\alpha' M_1 + \beta\beta' M_2 + \gamma\gamma' M_3 \in \mathscr{F}$ (grâce aux deux questions précedentes).

6. On écrit $aA + bB + cC = xM_1 + yM_2 + zM_3$. Cela revient à appliquer la matrice de passage de (M_1, M_2, M_3) vers $\mathscr{B}$ au vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (c'est à dire la matrice P^{-1}).

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b+c \\ b-c \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7. (a) $I = M_1 + M_2 + M_3$.

   (b) $(M_{a,b,c})^k = (xM_1 + yM_2 + zM_3)^k = \big((-2b+c)M_1 + (b-c)M_2 + (a+c)M_3\big)^k = (-2b+c)^k M_1 + (b-c)^k M_2 + (a+c)^k M_3$.

   (c) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\big((-2b+c)^k M_1 + (b-c)^k M_2 + (a-c)^k M_3\big)$.

   Donc $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2b+c)^k}{k!}$, $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-c)^k}{k!}$ et $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+c)^k}{k!}$.

   (d) $\alpha = e^{-2b+c}$, $\beta = e^{b-c}$, $\gamma = e^{a+c}$.