

Devoir surveillé de Mathématiques n°6 - Concours blanc.

Classe de HKBL. Lycée Michel Montaigne. Année scolaire 2013/2014.

9 avril 2014

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. On notera que les questions elles-mêmes de chaque exercice sont relativement indépendantes entre elles. On pourra ainsi admettre la réponse d'une question pour poursuivre et utiliser le résultat admis ultérieurement.

Pensez à encadrer ou souligner vos résultats.

EXERCICE 1

- (a) Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.
(b) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$.
- Calculer $\int_0^2 \max(x, \sqrt{x}) dx$
- Soit $x \geq 1$. Calculer $\int_1^x \ln(t) dt$.
- Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$I_n = \int_0^\pi t^n \sin(t) dt$$

- Calculer I_0 et I_1 .
- Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
- Calculer, grâce à la formule trouvée à la question précédente, I_2 et I_3 .

EXERCICE 3

On se propose d'étudier la fonction suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + \sin^2(x))$$

- Montrer que la fonction f est paire et périodique.
- Donner le tableau de variations de f .
- Donner un équivalent de f en 0.
- Tracer la courbe représentative de f .
- Montrer l'inégalité suivante : $\forall 0 \leq y \leq x, |f(x) - f(y)| \leq 2x(x-y)$. (on pourra utiliser après l'avoir redémontrée l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t réel).
- Montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f(x) \leq x$.
- Soit $x_0 > 0$. Montrer que la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est monotone.
- En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
- On suppose $0 < x_0 < \exp(-1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{e}\right)^{(2^n)}$.

Indication : remarquer que $f(0) = 0$ et utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que $x_{n+1} \leq 2x_n^2$.

EXERCICE 4

Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 3$. On considère la famille de polynômes suivante :

$$H_0(X) = 1, H_1(X) = X \text{ et } \forall i \geq 2, H_i(X) = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X - k).$$

1) a) Calculer $H_2(X)$ et $H_3(X)$.

b) Montrer que $\forall i \in \llbracket 0, m+1 \rrbracket, H_i \in \mathbb{R}_{m+1}[X]$.

c) Montrer que $\{H_0, H_1, H_2, \dots, H_{m+1}\}$ est une base de $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$

a) Expliquer pourquoi $H_i(k) = 0$ si $k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$.

b) Prouver que pour $i \leq k$ $H_i(k) = \binom{k}{i}$.

3) a) Soit $i \in \mathbb{N}$ avec $i \geq 2$. Montrer que $H_i(X+1) = \frac{1}{i!} (X+1) \prod_{k=0}^{i-2} (X-k)$.

b) En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}^*, H_i(X+1) - H_i(X) = H_{i-1}(X)$.

4) On pose $E = \mathbb{R}_{m+1}[X]$ et $F = \{P \in E \text{ tels que } P(0) = 0\}$.

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $\{H_1, H_2, \dots, H_{m+1}\}$ est une base de F .

5) Soit $p \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket$. Montrer que $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tq $X^p = \sum_{i=1}^p \alpha_i H_i(X)$.

6) Soit $P \in E$ avec $P(X) = \sum_{i=0}^{m+1} \beta_i H_i(X)$. Montrer que $P(X+1) - P(X) = \sum_{i=0}^m \beta_{i+1} H_i(X)$.

7) Soit $p \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme $B_p \in F$ tel que $X^p = B_p(X+1) - B_p(X)$
(On exprimera B_p à l'aide des coefficients α_i définis au 5).

b) On pose $S_n(p) = \sum_{k=0}^n k^p$. Prouver que $S_n(p) = B_p(n+1)$.

8) On admet que $X^3 = H_1(X) + 6H_2(X) + 6H_3(X)$.

À l'aide de ce qui précède, calculer B_3 polynôme tel que $X^3 = B_3(X+1) - B_3(X)$.

En déduire la valeur de $S_n(3) = \sum_{k=0}^n k^3$.

9) (Dans cette question on va calculer les coefficients $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq j}$ de la décomposition du 5))

On pose $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$.

On admet que φ_i est une application linéaire.

a) Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \varphi_i(H_i) = 1$.

b) Soit $j > i$. Prouver à l'aide de 2a) que $\varphi_i(H_j) = 0$.

c) On suppose que $i \geq j$.

– Prouver que $\forall k \in \llbracket j, i \rrbracket \quad \binom{i}{k} \binom{k}{j} = \binom{i}{j} \binom{i-j}{k-j}$.

– Prouver que $\varphi_i(H_j) = \binom{i}{j} \sum_{\ell=0}^{i-j} (-1)^{i-j-\ell} \binom{i-j}{\ell}$.

– En déduire que $\varphi_i(H_j) = 0$ pour $i \geq j$.

d) En déduire que $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad \alpha_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^j$.