Devoir surveillé de Mathématiques n°5.

Classe de HKBL. Lycée Michel Montaigne. Année scolaire 2013/2014.

15 mars 2014

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de trois exercices et un problème indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. On notera que les questions elles-mêmes de chaque exercice sont relativement indépendantes entre elles. On pourra ainsi admettre la réponse d'une question pour poursuivre et utiliser le résultat admis ultérieurement.

Pensez à encadrer ou souligner vos résultats.

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f\big((x,y,z)\big)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{K}er\, f$, de $\mathrm{Im}\, f$.
3. $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{K}er\, f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 4 ; on désigne par $\mathscr{B}$ la base canonique de E, formée des éléments e_k : ainsi $e_k(X) = X^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4.

On désigne, d'autre part, par $\mathscr{I}$ l'ensemble des polynômes impairs, et par $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes pairs de E.

1. Montrer que E est somme directe de $\mathscr{I}$ et $\mathscr{P}$, c'est à dire que $E = \mathscr{I} \oplus \mathscr{P}$.
2. On considère l'ensemble des polynômes P_k définis, pour $k = 0, 1, \ldots, 4$, par

$$P_k(X) = \sum_{j=0}^{k} X^j$$

   (a) Montrer que les P_k constituent une base de E que l'on notera $\mathscr{B}'$;

   (b) Soit P le polynôme $\sum_{k=0}^{4} a_k e_k$ où les a_k sont des réels ; exprimer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}'$.

3. On considère l'application $f : P \to f(P)$ définie par

$$f(P)(X) = (X^2+1)P''(X) - XP'(X)$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E, laissant stables $\mathscr{I}$ et $\mathscr{P}$ (i.e. $\forall A \in \mathscr{I}$ on a $f(A) \in \mathscr{I}$ et $\forall B \in \mathscr{P}$ on a $f(B) \in \mathscr{P}$)

   (b) Donner la matrice M_f de f dans la base $\mathscr{B}$;

   (c) Déterminer le noyau de f ; M_f est elle inversible ?

EXERCICE 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel et $M_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

I est la matrice unitaire de $M_3(\mathbb{R})$ et M est la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$, puis A^2.
   (b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $M^n = I + u_n A$, u_n étant le terme général d'une suite réelle.
   (c) Calculer u_{n+1} en fontion de u_n, puis en fonction de n ; en déduire l'expression de M^n.
2. Soit J la matrice $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculer J^2 puis J^n ; montrer que J n'est pas inversible.
3. On considère l'ensemble E des matrices de la forme $aI + b\mathrm{J}$ où a et b sont deux réels quelconques.
   (a) Montrer que $M \in E$.
   (b) En déduire l'expression de M^n en fonction de I et de J ; comparer au résultat obtenu précedémment.

PROBLÈME 1

Partie I :

Dans cette partie, on considère $F = \left\{ u = (u_n)_n \;\middle|\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2\, u_{n+1} - 2\, u_n \right\}$.

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

2. On définit deux suites $t = (t_n)_n$ et $s = (s_n)_n$ en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad t_n = (\sqrt{2})^n \cdot \cos\left(\frac{3\,n\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad s_n = (\sqrt{2})^n \cdot \sin\left(\frac{3\,n\pi}{4}\right).$$

   a) Prouver que $\{t, s\}$ est une famille libre.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$ (On donnera les solutions sous forme exponentielle).

   c) A l'aide du théorème donnant le terme général d'une suite récurente linéaire d'ordre 2, montrer que la famille $\{t, s\}$ est une base de F.

3. On considère l'application φ définie sur F par :

$$\forall\, u = (u_n)_n \in F, \quad \varphi(u) = \Big(u_0 + u_2, u_0 + 2\, u_1 \Big).$$

   a) Montrer que φ est une application linéaire.
   b) Calculer $\varphi(t)$ et $\varphi(s)$.
   c) A l'aide de 2. et de 3.b), déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (on en donnera une base).
   d) Déterminer un vecteur $e = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\langle e\rangle$.

Partie II :

Dans cette partie, on considère $E = \left\{ u = (u_n)_n \;\middle|\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -u_{n+2} + 2\, u_n \right\}$.

On admet que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

1. a) Soit $u = (u_n)_n \in F$. Montrer que $u \in E$.

   b) Soit $c = (c_n)_n$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1$. Montrer que $c \in E$.

2. Soit $z = (z_n)_n$ une suite de E . On définit une suite $a = (a_n)_n$ en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = z_n - \frac{1}{5}\,(z_2 + 2\, z_1 + 2\, z_0).$$

a) Prouver que la suite $a = (a_n)_n$ est une suite de E.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+3} + 2\,a_{n+2} + 2\,a_{n+1} = a_{n+2} + 2\,a_{n+1} + 2\,a_n$.
Que peut-on dire sur la suite $(\theta_n)_n$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n = a_{n+2} + 2\,a_{n+1} + 2\,a_n$?

c) Déduire de ce qui précède que $a \in F$.

3. a) Montrer à l'aide de II.2. que la famille $\{c, t, s\}$ est une famille génératrice de E.

b) Montrer que $\{c, t, s\}$ est une base de E.

Partie III :
Dans cette partie, on pose $G = \left\{ u = (u_n)_n \;\middle|\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -u_{n+2} + 2\,u_n + 5 \right\}$

1. G est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites ?

2. a) Soit $x = (x_n)_n$ la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n$. Prouver que $x \in G$.

b) Soit $u = (u_n)_n$ une suite. On définit une suite $y = (y_n)_n$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad y_n = u_n - n$.
Prouver qu'on a l'équivalence :

$$u \in G \Leftrightarrow y \in E.$$

c) En déduire que pour toute suite $u = (u_n)_n$ de G, il existe des réels $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n + \alpha + \beta \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \cos\left(\frac{3\,n\,\pi}{4}\right) + \gamma \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \sin\left(\frac{3\,n\,\pi}{4}\right).$$