Devoir surveillé de Mathématiques n°4.

Classe de HKBL. Lycée Michel Montaigne. Année scolaire 2013/2014.

18 janvier 2014

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. On notera que les questions elles-mêmes de chaque exercice sont relativement indépendantes entre elles. On pourra ainsi admettre la réponse d'une question pour poursuivre et utiliser le résultat admis ultérieurement.

Pensez à encadrer ou souligner vos résultats.

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), soient f_1, f_2, f_3 définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = e^{3x}.$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre.

Exercice 2

En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble $E_1 \subset E$ défini par :

$$E_1 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + b + c = 0\right\}.$$

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer (en justifiant) une base de E_1, puis en déduire $\dim E_1$.
3. Soit $E_2 = \mathrm{Vect}\langle(0, 0, 1)\rangle$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
4. Soit $\vec{x} = (3, 7, -4) \in E$. Déterminer $\vec{x}_1 \in E_1$ et $\vec{x}_2 \in E_2$ tels que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

EXERCICE 4

On considère le système (S) :

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ 2x+7y+mz=p \\ my+5z=10 \end{array}\right.$$

avec les paramètres $m, p \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre le système (S) pour $m=3,\ p=12$.
2. On revient au cas général (i.e. $m, p \in \mathbb{R}$ quelconques). Transformer le système (S) en un système équivalent triangulaire (S'), par la méthode du pivot de Gauss.
3. Pour quelles valeurs de m le système (S) admet-il une et une unique solution ?
4. Pour quelles valeurs du couple (m, p) le système (S) admet-il plus d'une solution ?
5. Pour chacun des couples (m, p) trouvés à la question précedante, déterminer l'ensemble de solutions du système (S).

EXERCICE 5

1. Soit α et β deux nombres réels strictement positifs, et g la fonction suivante :

$$g : h \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\alpha}{h} + \frac{h}{2}\beta.$$

Étudier les variations de g. En déduire que g admet un minimum, dont on précisera la valeur et l'antécedent en fonction de α et β.

2. Soit a et b deux nombres réels distincts et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle réel $I = \left[\min(a,b), \max(a,b)\right]$. On note f' et f'' ses dérivées première et seconde. Montrer qu'il existe $c \in I$, avec $c \neq a$; $c \neq b$, tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

On pourra considérer la fonction

$$\varphi : x \in I \longmapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - A\frac{(b-x)^2}{2}$$

où A est une constante à préciser.
[*Indication : utiliser le théorème de Rolle.*]

3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) On dit que $M \in [0,+\infty[$ est un majorant de $|f|$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.
   On suppose que $|f|$ admet un majorant M_0 et que $|f''|$ admet un majorant M_2. Montrer que pour tout $h > 0$, $|f'|$ admet pour majorant

$$\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2.$$

   On pourra pour cela appliquer le résultat de la question 2. à des couples $(x, x+h)$ d'une part,$(x, x-h)$ d'autre part.
   En déduire que $|f'|$ admet $\sqrt{2M_0M_2}$ pour majorant.

   (b) Avec les notations précédentes et toujours en utilisant la question 2., montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f''(t) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0.$$